Entwurf einer kurzen Unterrichtsreihe zur anschaulichen und experimentell unter-stützten Einführung des Fraktalbegriffs

erschienen in

COMPUTER + UNTERRICHT Heft 14/1994
CHAOS / FRAKTALE Erhard Friedrich Verlag

Einleitung

Angesichts der bereits vollen Stoffpläne ist es nicht leicht, der Forderung nachzukommen, auch aktuelle Themen in den Mathematikunterricht einzubringen. Die Fraktale Geometrie scheint ein Gebiet zu sein, für das es sich lohnt, etwas Unterrichtszeit zu investieren, denn die Beschäftigung mit fraktalen Grafiken kann dem Interesse an Mathematik neue Impulse geben. Das gilt besonders dann, wenn ein experimentelles Werkzeug zur Erzeugung von selbst erdachten fraktalen Gebilden zur Verfügung steht. Außerdem lassen sich Brücken zu anderen Fächern wie Biologie, Physik, Wirtschaftswissenschaften, Kunst u.v.m. schlagen und bei entsprechender Ausweitung der Inhalte könnte man daher fächerübergreifenden Unterricht organisieren.

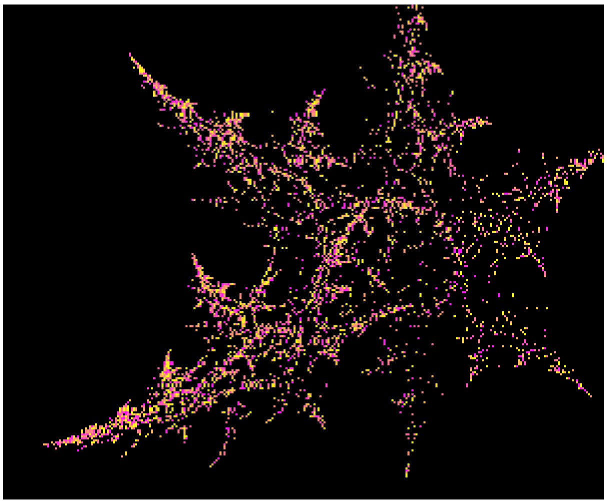


Bild 1: *Ein stacheliges Gebilde ist der Attraktor einer Drehstreckung und einer Kombination aus Scherung und zentrischer Streckung*

Bild 2: *Dies ist ein Beispiel für die Nachbildung einer Baumform*

So weit soll dieser Artikel allerdings nicht gehen. Hier wird eine Unterrichtsreihe erdacht, die in etwa 4 Doppelstunden (Minimum) in das Thema Fraktale Geometrie einführt. Konzipiert ist die Reihe für einen Mathematikkurs, in dem bereits Lineare Algebra unterrichtet wurde. Selbstverständlich könnte man das Thema auf einem anderen Niveau bereits in der Mittelstufe bearbeiten. Der zeitliche Rahmen erfordert Beschränkungen. Es soll zwar der Fraktalbegriff allgemein eingeführt werden; bei der Erzeugung fraktaler Bilder beschränke ich mich aber auf die Anwendung einer einzigen Methode, genannt Chaosspiel. Die mathematische Untersuchung erfordert einige Vorkenntnisse über affine Abbildungen der Ebene (oder des Raumes). Auf einem rein anschaulichen Niveau kann man solche Abbildungen aber auch in relativ kurzer Zeit einführen. Das begleitende Werkzeug zur Demonstration und zu experimentellen Arbeiten der Lernenden ist das Programm DOTFRAK, das ich zu diesem Zweck entwickelt habe. Es ist als Begleitdiskette zum Buch 'Fraktale aus Natur und Fantasie' erhältlich (Wittig-Fachbuchverlag, Chemnitzer Str. 10, 41836 Hückelhoven. Die jeweils neueste Programmversion von DFW erhält man für 10 € direkt bei mir.)

1. Unterrichtseinheit - Selbstähnlichkeit

Anhand mitgebrachter fraktal strukturierter Naturgebilde wie Blumenkohl, Farnblatt oder Zweige eines Baumes lässt sich durch Zerlegung in selbstähnliche Teile schnell zeigen, dass man bei entsprechender Vergrößerung eines Teiles dieses wieder für das ganze Gebilde halten könnte. Solche Materialien kann man den Schülern auch selbst in die Hand geben und sie damit Selbstähnlichkeit begreifen lassen. Eine große Vielfalt fraktaler Formen halte ich auch auf Dias bereit. Zum Teil sind das Fotos fraktaler Strukturen, die man auf jedem Spaziergang entdecken kann, zum anderen Bildschirmfotos von Grafiken, die mit dem Programm DOTFRAK erstellt wurden. Interessant ist es auch, die Entstehung eines solchen Bildes auf einem Farbbildschirm mitzuverfolgen. Die Tragweite des Begriffs Fraktal wird noch deutlicher, wenn man die Beispiele auf abstrakte Objekte ausdehnt, bei denen sich fraktale Strukturen erst bei grafischer Darstellung gewisser Objekteigenschaften herausstellen. Exemplarisch dafür sind die Brownsche Bewegung und das Modell des gehemmten Wachstums von Verhulst (Feigenbaum-Diagramm), die man mit vorbereiteten grafischen Darstellungen erläutern kann. In einer vertieften und zeitaufwendigeren Behandlung, die die oben angegebene Zeitvorgabe überschreiten würde, ließen sich bereits mit einem Taschenrechner Experimente dazu anstellen. Unterrichtlich brauchbare Materialien finden sich bei Peitgen [1] und Lauwerier [2].

Im nächsten Schritt wäre die Unterscheidung zwischen Naturfraktalen und mathematischen Fraktalen hervorzuheben. Bei selbstähnlichen natürlichen Gebilden muss die Selbstähnlichkeit z.B. der äußeren Form nach einigen Stufen enden, da ein Naturobjekt nicht nur die Eigenschaft Form besitzt, sondern auch innere Systeme einer gewissen Mindestgröße, die eine Funktion wie z.B. den Nährstofftransport zu erfüllen haben. Es können auch von der äußeren Form abweichende innere fraktale Strukturen existieren, die ebenfalls durch eine andere Größenordnung begrenzt werden. Mathematische Fraktale können dagegen bis in unendlich kleine Größenbereiche exakte Selbstähnlichkeit aufweisen.

Als Definition für Selbstähnlichkeit bietet sich an (Peitgen [3]):

Eine Figur wird selbstähnlich genannt, wenn Teile der Figur kleine Kopien der ganzen Figur sind.

Eine Figur ist exakt selbstähnlich, wenn sie in Teile, die exakte Kopien der ganzen Figur sind, zerlegt werden kann. Jeder beliebige Teil enthält eine exakte Kopie der ganzen Figur.

Nach der Präsentation und Untersuchung einer großen Zahl an Beispielfraktalen kann man auf Anwendungen der Fraktalen Geometrie eingehen. Ein Anliegen ist es, Natur besser als vorher zu beschreiben. Dabei ist die Fraktale Geometrie der Euklidischen überlegen, was Mandelbrot [4] in der Einleitung zu seinem bekanntesten Buch ausdrückt:

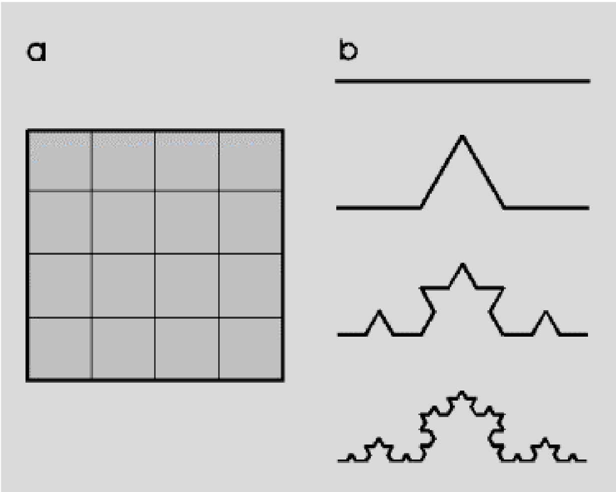
Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise...

Die Erfolge der Fraktalen Geometrie zeigen sich u.a. in den Ansichten synthetisch erzeugter Berggipfel und Planeten, die man inzwischen auf fast jedem Personalcomputer bewundern kann. In neueren Kinofilmen wurden mit fraktalen Methoden Landschaften künstlich hergestellt, die sich optisch nicht von einer Naturaufnahme unterscheiden lassen.

Um ein geometrisches Objekt in N selbstähnliche Gebilde aufzuteilen, braucht man den von der Dimension D abhängigen Teiler:

$$r(N) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{D}}$$

Bild 3: Zum Dimensionsbegriff



a) Das (euklidische) Quadrat werde in 16 Quadrate aufgeteilt. Es gilt:

$$r(16) = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{D}} = \frac{1}{4}$$

offensichtlich erfüllt für D = 2; seine topologische Dimension

b) Die Kochkurve werde in 4 selbstähnliche Objekte geteilt. Es gilt:

$$r(4) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{D}} = \frac{1}{3}$$

ist erfüllt für D = log 4: log 3; ihre fraktale Dimension

2. Unterrichtseinheit - Fraktale und Dimension

Der von Mandelbrot geprägte Begriff Fraktal (von lat. frangere = zerbrechen) trifft die untersuchten Objekte in dreierlei Weise. Denn erstens erscheinen die Grafiken bei lokaler Betrachtung oft unregelmäßig und zerbrochen; zweitens bedeutet fraktal auch irregulär und das beschreibt den Unterschied der regulären geometrischen Strukturen von Euklid zu den selbstähnlichen Strukturen, bei denen u. U. eine Kurve eine Fläche vollständig ausfüllen kann. Drittens haben Fraktale oft eine nicht ganzzahlige gebrochene Dimension.

Mandelbrot [4] definiert:

Ein Fraktal ist eine Menge, deren Hausdorff-Besicovitch-Dimension echt die topologische Dimension übersteigt.

Damit sich die Schüler nicht erschrecken und die beabsichtigte Mathematik-Motivation sich nicht in ihr Gegenteil verkehrt, sollte man zuvor exemplarisch die fraktale Dimension eines Gebildes, z. B. der Kurve von Koch bestimmen. Einige weitere Beispiele finden sich in fast allen angegebenen Büchern, so dass hier eine kurze Beschreibung genügen soll (siehe Bild 3). Im Dimensionsbegriff liegt auch eine Möglichkeit für eine vertiefte Behandlung des Themas, da es mehrere Spielarten der Dimension gibt (Selbstähnlichkeits-, Zirkel- und Box-Dimension). Materialien bis hin zu Arbeitsblättern enthält Peitgen [3]. An der Koch-Kurve lässt sich auch der Begriff der Grenzfigur oder des Attraktors einführen. Beim Zeichnen von Näherungsstufen der Koch-Kurve werden die anzubringenden Änderungen so klein, dass sie wegen der begrenzten Zeichengenauigkeit (oder der begrenzten Auflösung eines Bildschirms) zu optisch nicht mehr unterscheidbaren Bildern führen. Die Grenzfigur ist die Kurve, die bei stufenweiser Vergrößerung eines Kurventeils stets wieder feinere Faltungen nach der ursprünglichen Konstruktionsvorschrift offenbaren würde.

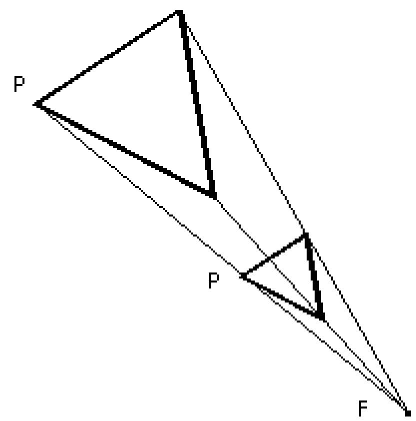


Bild 4: *Eine zentrische Streckung mit Streckzentrum F (Fixpunkt) und einem Streckfaktor kleiner als 1 angewandt auf ein Dreieck*

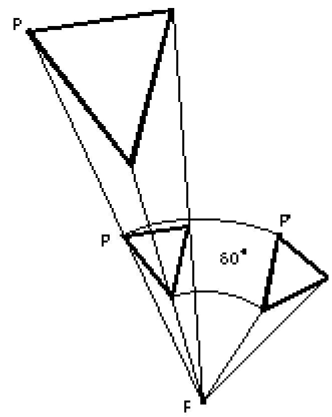


Bild 5: *Eine Drehstreckung ist eine zentrische Streckung mit Fixpunkt F gefolgt von einer Drehung um den Fixpunkt F*

3. Unterrichtseinheit - IFS, Chaosspiel und Attraktor

Fraktale entstehen, wenn man eine bestimmte Abbildungsvorschrift auf ein Ausgangsbild anwendet, das Ergebnis wieder als Ausgangsbild benutzt und die Vorschrift erneut anwendet usw. (siehe Koch-Kurve). Einen solchen Rückkopplungsprozess nennt man Iteration. Eine schnelle Methode der Fraktalberechnung ist der Einsatz von Iterierten Funktionensystemen (IFS). Ein IFS besteht in der Regel aus mehreren Funktionen, die nacheinander auf eine Bildpunktemenge anzuwenden sind. Die Grundlage für die IFS bildet das Banachsche Fixpunktprinzip.

Es besagt:

Stellt das IFS eine kontrahierende Abbildung auf einem vollständigen metrischen Raum dar (kontrahierend heißt, dass der Abstand zweier Bildpunkte f(x) und f(y) immer absolut kleiner ist als der Abstand der Ausgangspunkte x und y), hat das Rückkopplungssystem einen eindeutigen Attraktor. Die Anwendung des IFS auf den Attraktor ergibt wieder den Attraktor.

Diese Zusammenhänge und das unten angeführte Chaosspiel sind sehr gut und ohne Ballast bei Peitgen [5] dargestellt. Im Programm DOTFRAK stehen zur Festlegung von IFS mehrere Typen von affinen (geradentreuen und umkehrbaren) und nichtaffinen Abbildungen der Ebene (oder des Raumes) zur Verfügung. Für jede dieser Funktionen muss die Lage eines Fixpunktes festgelegt werden, der bei Anwendung der Funktion auf sich selbst abgebildet wird. Die wichtigsten Abbildungen sind die zentrische Streckung und die Drehstreckung, die allerdings mit Streckfaktoren kleiner als 1 eingesetzt werden, so dass sie als Stauchungen wirken. Diese sollte man im Unterricht vorstellen (siehe Bilder 4 und 5). Zur Herleitung der Transformationsgleichungen eignet sich - insbesondere für die räumliche Betrachtung - die Vektorrechnung. Wenn man mit einem IFS nun ein beliebiges Ausgangsbild transformiert und die Iteration solange durchführt, bis sich das Bild nicht mehr verändert, hat man sich bis auf Bildschirmauflösung dem Attraktor genähert. Noch schneller kommt man zu ansehnlichen Grafiken, wenn man das IFS mit der Chaosspielmethode benutzt. Dazu wird in jedem Iterationsschritt zufällig eine der Funktionen eines IFS ausgewählt und einzig auf den Vorgängerbildpunkt angewandt. Nach Beginn der Iteration mit einem willkürlichen Bildschirmpunkt und einer kurzen Einspielzeit erscheinen als Bildpunkte ausschließlich Punkte, die zum Attraktor gehören. Für die Bildpunkte lassen sich nach unterschiedlichen Kriterien Farben auswählen (z.B. kann man jeder Funktion des IFS eine Farbe zuordnen und die Farbe der zuletzt aktiven Funktion verwenden, die den aktuellen Bildpunkt erzeugt hat); damit erhält man aussagekräftige farbige Bilder.

Ob sich der Attraktor des IFS in angemessener Zeit vollständig (bis auf Bildschirmauflösung) zeigt, hängt davon ab, mit welcher Wahrscheinlichkeit die einzelnen Transformationen des IFS ausgewählt werden. Oft muss man die Wahrscheinlichkeiten ungleichmäßig verteilen, um den gewünschten Erfolg zu haben.

Zusammen mit den übrigen Funktionstypen (u.a. Scherung und Kreisspiegelung) ergibt sich ein vielfältiger Spielraum für die Experimente mit DOTFRAK. Das Programm lässt auch die Konstruktion von nicht kontrahierenden IFS zu.

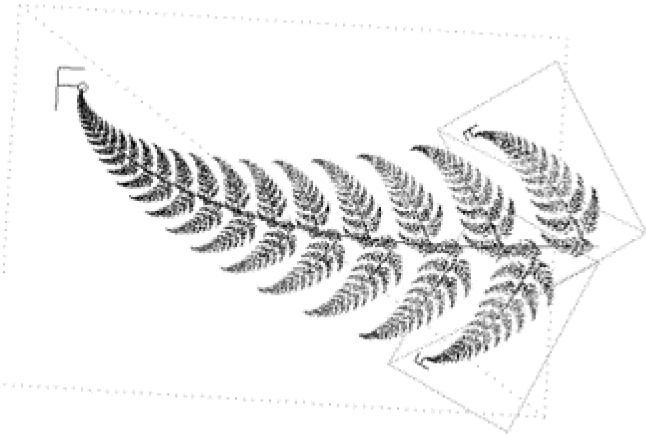


Bild 6: *Ein Farn in der Art von Michael Barnsleys Farn entsteht durch den Einsatz von drei Drehstreckungen (eine mit Spiegelung, erkennbar an der Lage des Indikatorbuchstabens F) sowie einer zusätzlichen Streckung mit unterschiedlichen Streckfaktoren in x- und y-Richtung. Der y-Streckfaktor liegt nahe bei 0*

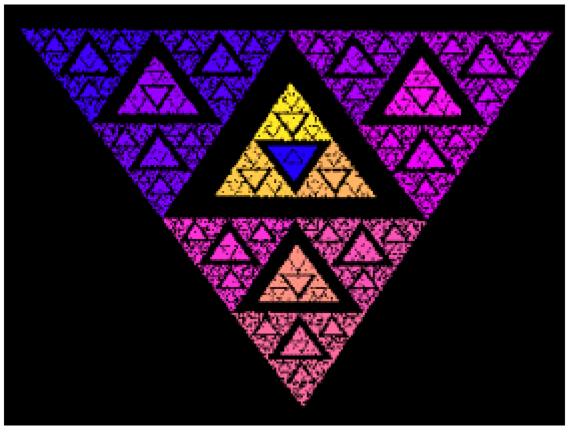


Bild 7: *Drei zentrische Streckungen mit dem Faktor 0,5 ergeben das bekannte Sierpinski-Dreieck. Dieses hier ist allerdings noch mit einer vierten zentrischen Streckung und Spiegelung 'gefüllt'.*

4. Unterrichtseinheit - Experimente mit DOTFRAK

Zu Beginn der Experimentierphase sind die folgenden Basisversuche aufschlussreich:

a) Man wählt eine Drehstreckung (zentrische Streckung kombiniert mit einer Drehung) mit einem Streckfaktor kleiner als 1 als einzige Transformation eines IFS (siehe Bild 8) und erhält als Attraktor nur einen einzigen Punkt, nämlich den Fixpunkt der zentrischen Streckung.

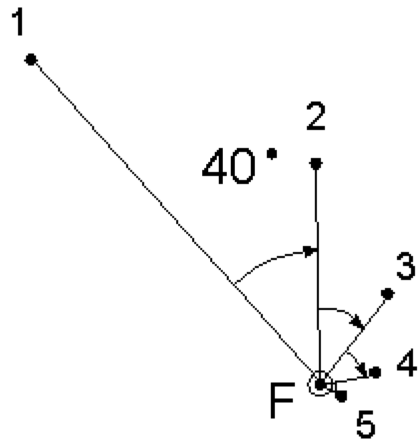
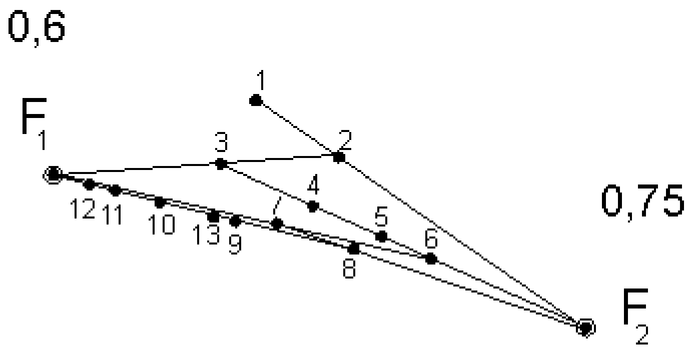


Bild 8: *Eine Iteration mit einer Drehstreckung zieht die Bildpunkte auf den Fixpunkt F zu. Im Rahmen der Bildschirmauflösung wird dieser Punkt nach endlich vielen Schritten erreicht.*

b) Man erweitert das IFS um eine zweite zentrische Streckung mit Streckfaktor kleiner 1 und einem Fixpunkt, der vom Fixpunkt der ersten Transformation einen deutlichen Abstand hat (siehe Bilder 9a und 9b). Die ursprüngliche Drehstreckung wird in eine zentrische Streckung verändert. Der Attraktor ist diesmal eine Linie zwischen den beiden Fixpunkten.

Bild 9a und 9b:
Ein IFS mit zwei Transformationen. Hier wird die Iteration im Chaosspiel mit zwei zentrischen Streckungen ausgeführt. Nach endlich vielen Schritten erreicht die Folge der Bildpunkte die Verbindungslinie zwischen beiden Streckzentren (innerhalb der Bildschirmauflösung). Alle folgenden Bildpunkte bleiben dann auf dieser Linie, dem Attraktor des IFS.



c) Ersetzt man nun eine der beiden zentrischen Streckungen durch eine Drehstreckung (z.B. mit Drehwinkel 40 Grad), ändert sich der Attraktor in überraschender Weise (siehe Bild 10).

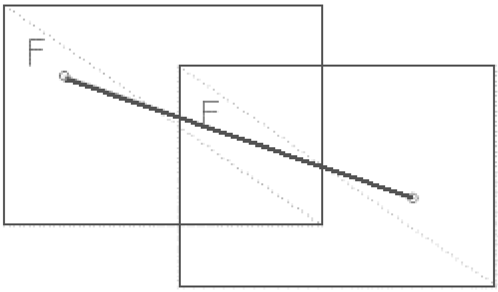


Bild 9b

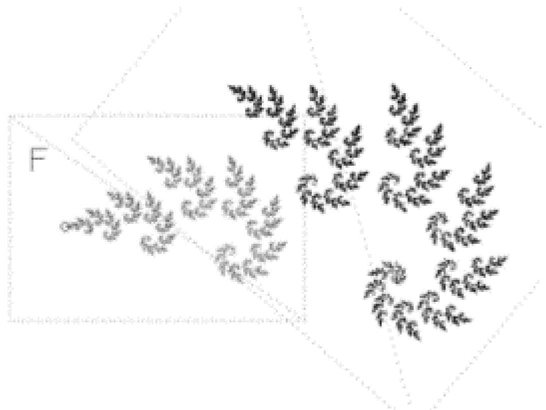


Bild 10: *Eine gänzlich neue Qualität des Attraktors zeigt sich, wenn man in dem Experiment aus Bild 9 eine zentrische Streckung durch eine Drehstreckung ersetzt.*

d) Fügt man anstelle der Änderung c) eine dritte zentrische Streckung mit abweichendem Fixpunkt ein und setzt alle Streckfaktoren auf 0.5, so erhält man ein bekanntes Fraktal, das Sierpinski-Dreieck (vgl. mit Bild 7). Zu dem Versuch d) gibt es übrigens bei Peitgen [3] auch Vorschläge wie man das Chaosspiel mit Bleistift, Papier und Würfel von den Schülern ausführen lassen kann.

Als nächstes kann man eines der über 150 auf Diskette vorhandenen IFS laden und das berechnete Grenzbild betrachten. Für den Anfang wähle man IFS mit maximal vier Transformationen aus. Jede dieser Transformationen lässt die Veränderung seiner Parameter (je nach Transformationstyp) zu, dies sind: Fixpunkt, Streckfaktor, Achse, Drehwinkel, Scherwinkel, Wahrscheinlichkeit (Gewicht des Einsatzes dieser Transformation). Bereits die Lageänderung der Fixpunkte (durch Anfassen und Verschieben mit der Maus) wird die Form des Attraktors völlig verändern. Nach und nach kann man die Einflüsse aller Parameter austesten und wenn genügend Computer vorhanden sind, kann jeder Schüler so sein eigenes Fraktal schaffen und nach Belieben einfärben.

Die zweite Phase der Experimente ist schwieriger; hier geht es um die willkürliche Synthese bestimmter Formen. Eine angemessene Beschreibung der Einzelheiten erfordert einen Umfang, der den Rahmen dieses Artikels sprengen würde; daher sei sie hier nur angedeutet. Für gelungen halte ich die diesbezügliche Darstellung in Peitgen [5]. Das in der Einleitung benannte Buch 'Fraktale aus Natur und Fantasie' enthält weitere Synthese-Beispiele.

Ein Anspruch der Fraktalen Geometrie ist es, Natur zu beschreiben. Dank Michael Barnsley wissen wir wie man fraktale Naturformen nachbilden kann. Durch Überdeckung der Naturform mit verkleinerten Kopien seiner selbst bekommt man heraus, welche Transformationen für ein IFS benutzt werden können. Die Parameter sind nun so einzurichten, dass die Rahmen auf dem Bildschirm (die entstehen, wenn man die Transformation auf ein bildschirmgroßes Rechteck anwendet) in die entsprechende Position kommen wie die Überdeckungen auf der Naturform (siehe Bild 6).

Zum Abschluss des Entwurfs sei noch darauf hingewiesen, dass sich der zeitliche Rahmen durch vertiefte Untersuchung der mathematischen Hintergründe (Möglichkeiten dazu sind oben angegeben) leicht auf das Doppelte und mehr strecken lässt. Wenn soviel Zeit zur Verfügung steht, sollte man jedoch m.E. die experimentellen Phasen nicht erst an das Ende der Unterrichtssequenz stellen sondern Experiment und Theorie abwechseln.

U. Schwebinghaus

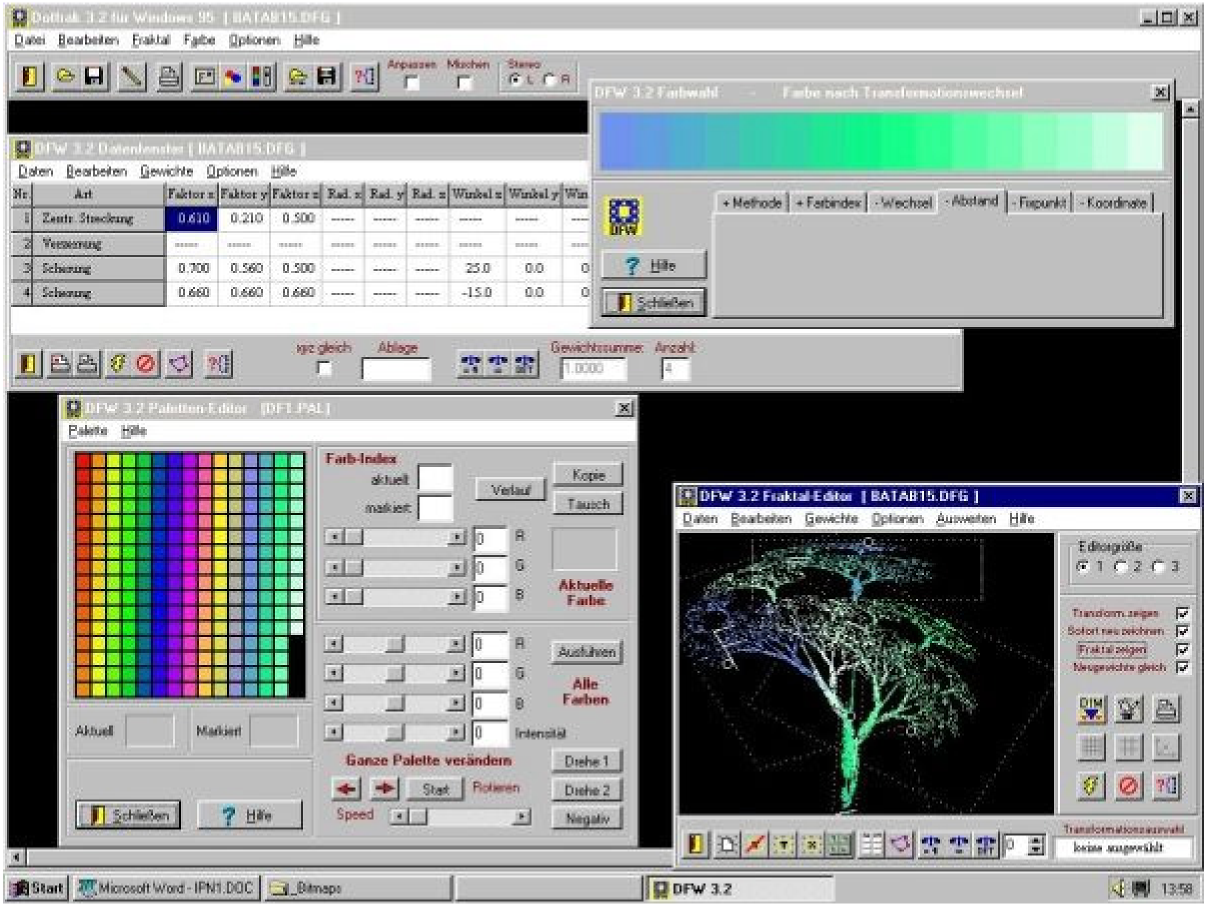


Bild 11: *Das Programm DFW bei der gezielten Erzeugung einer Baumform und der Farbgestaltung*

Anhang

Literatur

[1] Peitgen, Jürgens, Saupe, ..., Chaos Arbeitsbuch, Springer, Klett, 1992
[2] Lauwerier, Fraktale verstehen und selbst programmieren, Wittig, 1989
[3] Peitgen, Jürgens, Saupe, ..., Fraktale Arbeitsbuch, Springer, Klett, 1992
[4] Mandelbrot, Die fraktale Geometrie der Natur, Birkhäuser, 1987
[5] Peitgen, Jürgens, Saupe, Bausteine des Chaos, Klett-Cotta, Springer, 1992
[6] GEO Wissen, Chaos und Kreativität, Gruner und Jahr, 1990
[7] Schwebinghaus, Fraktale aus Natur und Fantasie, Wittig, 1994
[8] Briggs, Chaos, Hanser, 1992
[9] Gleick, Chaos, Droemer Knaur, 1988

Programme und Grafik

DFW 3.4	Dotfrak für Windows 98/XP erhältlich bei mir für 10 € (mit Buch 22 €)
Feigenbaum 4.3	Feigenbaum-Untersuchungen für Windows ab 98 - per E-mail-Kontakt (4.3 für 5 €)
LMayer 2.2	Lindenmayer-Fraktale für Windows 98/XP - freier Download
Liapunov 2.1	Liapunov-Fraktale für Windows 98/XP - über Email-Kontakt
Fraktal-Grafik	Bilder direkt aus den Galerien speichern (rechte Maustaste - Klick auf ein Bild)
FRACTINT 20.0	Universal-Fraktal-Programm für DOS - frei auf der FractInt-Homepage

Fraktale-Buch
mit Programm DFW
22 €

Zitate zum Fraktalbegriff

Mandelbrot [4], Die fraktale Geometrie der Natur, S. 13

Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise. Die Rinde ist nicht glatt - und auch der Blitz bahnt sich seinen Weg nicht gerade. ... Die Existenz solcher Formen fordert uns zum Studium dessen heraus, was Euklid als formlos beiseite lässt, führt uns zur Morphologie des „Amorphen“. Bisher sind die Mathematiker jedoch dieser Herausforderung ausgewichen. Durch die Entwicklung von Theorien, die keine Beziehung mehr zu sichtbaren Dingen aufweisen, haben sie sich von der Natur entfernt. Als Antwort darauf werden wir eine neue Geometrie der Natur entwickeln und ihren Nutzen auf verschiedenen Gebieten nachweisen. Diese neue Geometrie beschreibt viele der unregelmäßigen und zersplitterten Formen um uns herum - und zwar mit einer Familie von Figuren, die wir Fraktale nennen werden...

Mandelbrot [4], Die fraktale Geometrie der Natur, S. 16/17

Im Lateinischen sagt ein Sprichwort „Benennen heißt kennen“: Nomen est numen. Bevor ich mit der Untersuchung der in den vorangegangenen Abschnitten angedeuteten Mengen begann, waren sie nicht wichtig genug, um einen eigenen Namen beanspruchen zu können. Als aber die klassischen Monster aufgrund meiner Bemühungen ihre Krallen und Zähne verloren und nutzbar gemacht wurden, als viele neue „Monster“ zu entstehen begannen, wuchs das Bedürfnis nach einem Begriff. Es wurde schließlich akut, als dem ersten Vorgänger dieses Essays ein Titel gegeben werden musste.

Aus dem lateinischen Adjektiv fractus habe ich Fraktal geprägt. Das entsprechende lateinische Verb frangere bedeutet „zerbrechen: unregelmäßige Bruchstücke erzeugen“. Es ist deshalb vernünftig - und für uns sehr geeignet! - dass fractus neben „in Stücke zerbrochen“ (wie in Fraktion oder Refraktion) auch noch „irregulär“ meint. Beide Bedeutungen sind in Fragment enthalten.

Den Begriff fraktale Menge werden wir streng definieren, oft wird aber natürliches Fraktal oder Fraktal einfach nur dazu dienen, umgangssprachlich ein natürliches Muster zu bezeichnen, das sinnvoll durch eine fraktale Menge beschrieben werden kann. Zum Beispiel sind Brownsche Kurven fraktale Mengen, die physikalische Brownsche Bewegung bildet dagegen ein natürliches Fraktal.

Da Algebra aus dem arabischen jabara = zusammenbinden abgeleitet ist, stellen Fraktal und Algebra etymologische Antonyme dar!

Mandelbrot [4], Die fraktale Geometrie der Natur, S. 27

Ein Fraktal ist nach Definition eine Menge, deren Hausdorff-Besicovitch-Dimension echt die topologische Dimension übersteigt.

Jede Menge mit einem nichtganzzahligen D ist ein Fraktal.

Ein Fraktal kann jedoch auch ein ganzzahliges D besitzen. Zum Beispiel wird in Kapitel 25 gezeigt, dass die Spur der Brownschen Bewegung ein Fraktal ist, weil gilt $D = 2$ aber $D_T = 1$.

Lauwerier [2], Fraktale verstehen und selbst programmieren, Band 2, S. 13

Ein Fraktal ist eine komplizierte mathematische Figur, die in gewissem Maße „Selbstähnlichkeit“ aufweist. Keine sehr wissenschaftliche Definition, aber eine sehr viel bessere gibt es nicht. Mit Selbstähnlichkeit meinen wir, dass ein beliebig kleiner Ausschnitt des Fraktals alle Elemente des Ganzen enthält. Würden wir ein Fraktal unter ein Mikroskop legen, dann würden wir, unabhängig vom Vergrößerungsfaktor, stets ungefähr das gleiche Bild sehen, aber auch dies ist nicht zu wörtlich zu nehmen. Es ist so ähnlich wie bei der Definition von Geometrie. Als ein Mathematiker danach gefragt wurde, war seine Antwort: „Alles, was ein maßgeblicher Mathematiker darunter verstehen will.“

Erwartungen und Definitionen

John Briggs [8], Chaos, S. 28

Das, was man bezeichnen könnte als „die Ordnung, die in der Ungewissheit liegt“, ist von Künstlern seit jeher geschätzt und genutzt worden. Der britische romantische Dichter John Keats bewunderte die, wie er sagte, „Negative Begabung“, die Fähigkeit, „in Ungewissheiten, Mysterien, Zweifeln“ zu sein. Diese Fähigkeit sei, behauptete er, der Schlüssel zum schöpferischen Vermögen des Künstlers. Leonardo da Vinci betonte, dass „ein Maler, der keine Zweifel hat, wenig erreichen wird“, und er gab seinen Künstlerkollegen den Rat, sich für ihre Gemälde von den Flecken an der Wand inspirieren zu lassen. Immer wieder haben Künstler im Zweifel, in der Ungewissheit und Zufälligkeit des Lebens eine Harmonie entdeckt, die unvermittelt zum Wesen des Seins führt. Was auch immer der Maler, Dichter oder Komponist darstellt und gleichgültig, ob es abstrakt oder realistisch ist - das Endprodukt des Künstlers enthält Welten innerhalb von Welten. In der Kunst steckt immer mehr dahinter, als man sinnlich wahrnimmt. Wegen dieser Fähigkeit, Welten innerhalb von Welten anzudeuten, war die Kunst seit jeher fraktal. Die Chaosforschung trägt zu einem neuen Verständnis einer Ästhetik bei, die den sich wandelnden Kunstauffassungen verschiedener Zeiten, Kulturen und Schulen schon immer zugrunde lag. Viele Künstler von heute haben in der Chaostheorie sofort einen tiefen Zusammenhang mit ihrer persönlichen künstlerischen Einstellung zur Welt erkannt.

GEO Wissen [6], Chaos und Kreativität, S. 3

Das ist mehr als „Neuland“, das ist ein neues Universum des Denkens. ..

Selbstverständlich muss GEO-Wissen über eine wissenschaftliche Revolution berichten - und die „Chaosforschung“ ist ein solcher Umsturz des Weltbildes.

Gleick [9], Chaos - Die Ordnung des Universums, S. 13

Nachdem die Wissenschaft sich seiner angenommen hat, scheint Chaos heute allgegenwärtig. Eine aufsteigende Säule von Zigarettenrauch löst sich in wildverschlungene Wirbel auf. Eine Fahne bewegt sich im Winde auf und ab. Das Tröpfeln eines undichten Wasserhahns folgt erst einem kontinuierlichen Muster, um dann in ein eher zufälliges überzugehen. Chaos zeigt sich in der Entwicklung des Wetters, im Flug eines Flugzeugs, im Stau von Autos auf der Autobahn, in der Fließbewegung von Öl in einer unterirdischen Pipeline. Gleich welcher Art auch das Material sein mag - sein Verhalten gehorcht denselben, unlängst entdeckten Gesetzmäßigkeiten. Diese Erkenntnis beginnt Einfluss zu nehmen auf die Weise, wie Aufsichtsräte angesichts unsicherer Marktchancen ihre Entscheidungen treffen, wie Astronomen die Struktur des Sonnensystems deuten und wie politische Theorien den Übergang von Spannungen in bewaffnete Konflikte erklären.

Chaos durchbricht die Grenzlinien, die bisher die einzelnen Wissenschaftsgattungen voneinander schieden. Als eine Wissenschaft, die von der umfassenden Natur der Systeme handelt, führte es Gelehrte der verschiedensten Bereiche zusammen, die bislang völlig getrennt voneinander gearbeitet hatten.