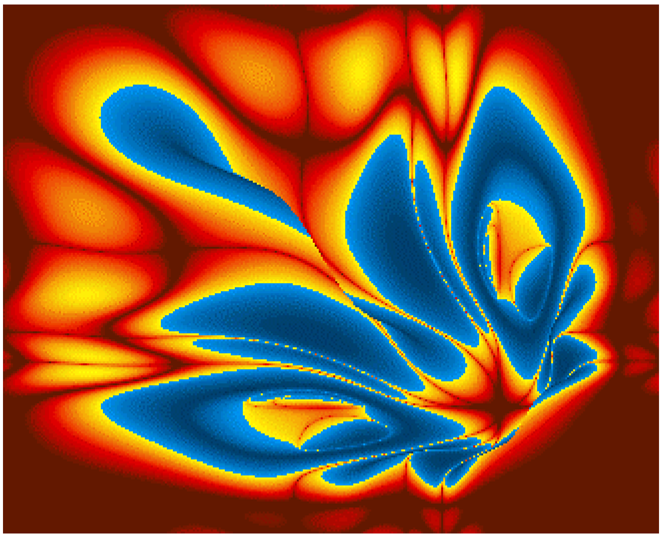
Die Entdeckung des Chaos



Dieser Artikel beschreibt das sogenannte deterministische Chaos, das in berechenbaren Rückkopplungssystemen zutage tritt. Das per Emailkontakt verfügbare Programm Feigenbaum ermöglicht die Untersuchung solcher Systeme. Eingeschlossen ist darin auch die grafische Aufbereitung in Form von Liapunov-Diagrammen.

Bis vor relativ kurzer Zeit erschien die Welt wohlgeordnet und in allen ihren Teilen berechenbar. In jeder Größenordnung ist das Universum angefüllt mit stabilen Strukturen. Auf der kleinsten bekannten Ebene binden sich die Elementarteilchen, die Quarks, zu Protonen und Neutronen, die die Kerne der Elemente bilden. Zusammen mit den Elektronen ergeben sich daraus die Atome als Voraussetzung für die Bildung komplexerer Strukturen aus Atomen und Molekülen. Gaswolken aus Atomen und Molekülen haben sich infolge der Schwerkraft zu kugelförmigen Objekten zusammengezogen und haben Sonnen, Planeten, Monde und Kometen geboren. Zumindest auf einem der Planeten haben sich aus den gleichen Grundbestandteilen komplizierte biologische Systeme etabliert, die so weit gekommen sind, dass sie über ihre eigene Existenz nachdenken können. Sie halten sich für die Krone der Schöpfung und glauben spätestens seit der Verbreitung der Newtonschen Gesetze an eine berechenbare, deterministische Welt, die prinzipiell wie ein Uhrwerk funktioniert. Newtons Weltbild wurde zwar durch Quantentheorie und Relativitätstheorie starken Veränderungen unterworfen, die man Revolutionen nannte, im Prinzip hat sich aber nichts an der Methode verändert, aus dem Verhalten der kleinsten Teilchen auf das Verhalten des gesamten Systems zu schließen. In den letzten zwanzig Jahren sind aber die Grenzen dieser Einstellung deutlich zutage getreten. Diese Grenzen zeigen sich in der Existenz und dem Verhalten von zahlreichen chaotischen Systemen, die gegenüber den geordneten Systemen in der Mehrheit sind. Beispiele sind das Wetter mit Stürmen, Turbulenzen und Wolkenbildung, die Entwicklung biologischer Arten, die Ausbreitung von Epidemien, Entstehung von Lawinen, eine unter Lebewesen ausbrechende Panik, die Entwicklung von Börsenkursen, Herzrhythmusstörungen wie auch der plötzliche Zerfall von Staaten und Weltreichen (Jugoslawien, UdSSR). Trotz ihrer Vielzahl wurden die chaotischen Systeme in den Wissenschaften einfach als Sonderfälle, als Störung des normalen Verhaltens ausgeklammert und unbehandelt zur Seite geschoben; notfalls mit einer linearen Näherung gerechnet. So werden auch in den klassischen Schulfächern bisher chaotische Systeme wenig beachtet. Im Nachhinein erscheint es angesichts der anderen Möglichkeiten geradezu als Wunder, dass es überhaupt relativ stabile Strukturen gibt. Nun, wenn es sie nicht gäbe, könnte man diese Überlegungen gar nicht anstellen.

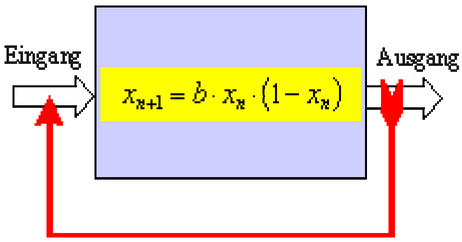
Bisher gibt es keine geschlossene Chaostheorie, aber in den letzten zwanzig Jahren wurden Ansätze entwickelt, deren Grundlagen bereits Ende des 19. Jahrhunderts von dem französischen Mathematiker Henri Poincaré erdacht wurden. Dabei ging es um die Beantwortung der

Frage, ob unser Planetensystem stabil sei. Für die Lösung des Vielkörperproblems hatte der schwedische König Oskar II einen lukrativen Preis ausgesetzt, den schließlich Poincaré erhielt, obwohl er nachweisen konnte, dass das entsprechende Gleichungssystem praktisch nicht lösbar ist. Das bedeutet, dass man bis heute nicht weiß, ob sich unser Planetensystem bis zum Ausbrennen der Sonne periodisch verhalten wird.

Was ist nun Chaos und welche Systeme sind chaotisch? Zur Untersuchung dieser Frage stellen wir uns ein einfaches System als eine 'Blackbox' vor, die einen Eingang und einen Ausgang besitzt. Der Ausgang wird mit dem Eingang verbunden, das nennt man eine Rückkopplung. Der am Ausgang gebildete Wert wird so dem System zugeführt und erneut vom System verarbeitet. Was daraus entstehen kann, zeigt sich an dem bekannten Beispiel mit Mikrofon, Verstärker und Lautsprecher.

Verhulst-Gleichung als Rückkopplungs-System

Verhulst-Iterator $x_{n+1} = b\, x_n\, (1 - x_n)$

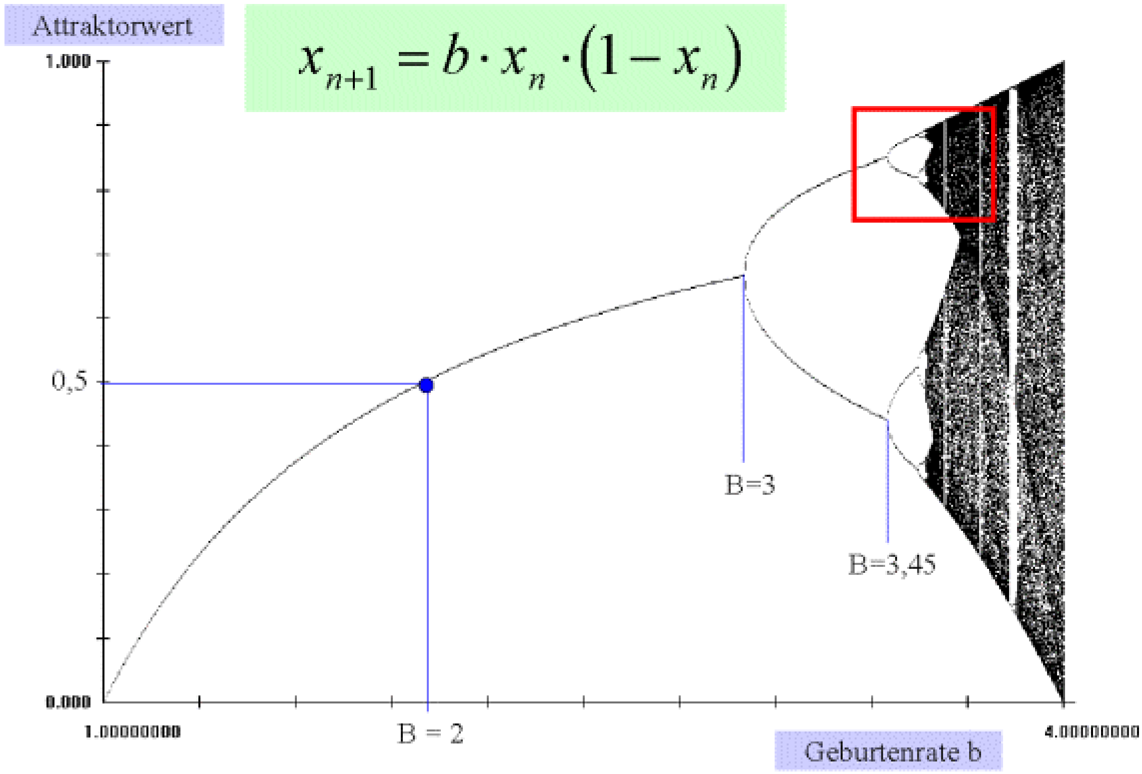


Untersuchungen haben ergeben, dass rückgekoppelte Systeme dann chaotisch reagieren können, wenn sie nichtlineare Komponenten besitzen. Als einfaches Beispiel soll das Verhalten das Systems durch die mathematische Gleichung repräsentiert werden. Sie ist Biologen als Verhulst-Gleichung bekannt und dient als Modell für die Entwicklung einer biologischen Population. Die Systemgröße x_n bedeutet darin die Anzahl der Individuen der biologischen Art. B ist die Geburtenrate und damit eine Stellgröße oder ein Parameter des Systems. B = 2 bedeutet beispielsweise, dass sich die Rasse im betrachteten Zeitraum verdoppelt. x_{n+1} ist dann die neue Anzahl. Wäre die Gleichung einfach nur $x_{n+1} = B\, x_n$, würde die Anzahl unbeschränkt wachsen. In der Natur trifft dies im allgemeinen aber nicht zu. Der Faktor $(1 - x_n)$ begrenzt daher das Wachstum, denn Nahrung und Raum sind nicht unbegrenzt verfügbar. Die Gleichung ist normiert, d.h. dass der Höchstwert für x_n die Zahl 1 ist, was 100% des Tragbaren für das System entspricht.

Rechnen wir einmal ein Beispiel:
Die Geburtenrate sei konstant B = 2 und der Startwert sei x = 0,8:
Wenn man einmal bei dem Ergebnis 0,5 angelangt ist, ergeben weitere Rechnungen keine Veränderungen mehr; das System hat einen stabilen Zustand, genannt Attraktor, erreicht. Auch andere Startwerte kleiner als 1 und größer als 0 führen zum selben Ergebnis.
Da das System nichtlinear ist, kann es aber auch chaotische Folgen erzeugen. Steigert man die Geburtenrate B beispielsweise auf den Wert 3.7, erhält man mit jedem beliebigen Startwert zwischen 0 und 1 eine chaotische Folge.

$$x_0 = 0{,}8$$
$$x_1 = 2 \cdot 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}8) = 2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}32$$
$$x_2 = 2 \cdot 0{,}32 \cdot (1 - 0{,}32) = 2 \cdot 0{,}32 \cdot 0{,}68 = 0{,}4352$$
$$x_3 = 0{,}49160$$
$$x_4 = 0{,}49985$$
$$x_5 = 0{,}49999$$
$$x_6 = 0{,}50000$$
$$x_7 = 2 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$$

Chaotisch bedeutet, dass die Ergebnisse dann im Bereich von 0 bis 1 hin und her springen und keinen Attraktor finden. Obwohl die Zahlen theoretisch streng bestimmt sind, erhält jeder, der nachrechnet, unterschiedliche Werte, die vom verwendeten Rechner abhängen. Schon kleinste Abweichungen in den Zwischenwerten führen zu völlig unterschiedlichen Zahlenfolgen. Dieses Verhalten nennt man die Sensitivität oder Empfindlichkeit des Chaos. Das sogenannte Feigenbaum-Diagramm (benannt nach dem Mathematiker Mitchell Feigenbaum) zeigt das Verhalten der Verhulstgleichung bei Veränderung der Geburtenrate B.

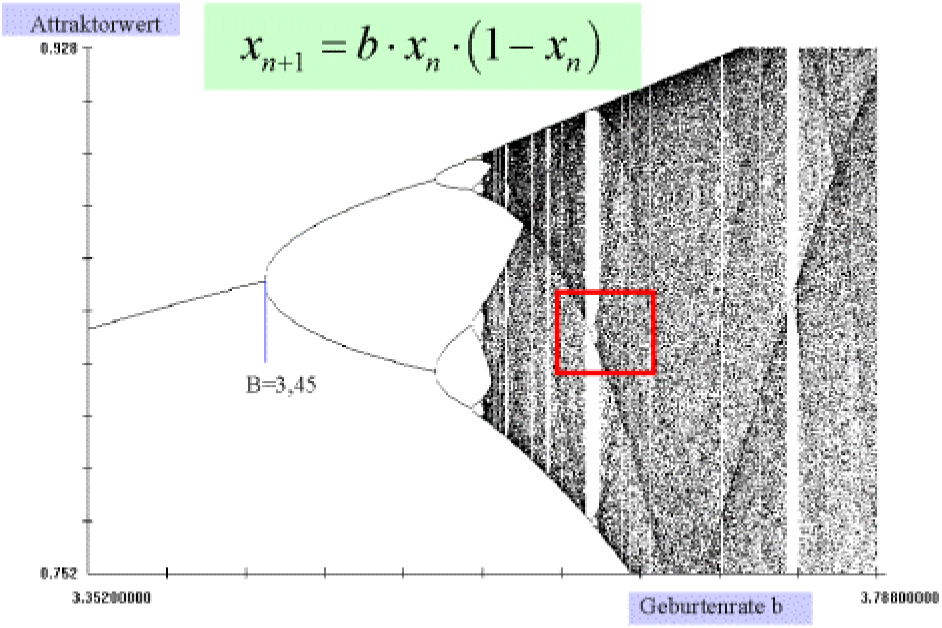


Feigenbaum-Diagramm:
Der Punkt im Diagramm zeigt beispielsweise unsere vorhergehende Rechnung mit B = 2 und einem beliebigen Startwert x. Aufgetragen ist nur der Endwert (Attraktor) der Rückkopplung (Iteration).

An der Grafik, in der nur die Endzustände der Rückkopplung aufgezeichnet sind, erkennt man, dass das System bis zur Geburtenrate B = 3 nach einigen Zyklen einen stabilen Wert erreicht, der sich bei festem B nicht verändert. Das heißt praktisch, dass die Population schließlich auf einem bestimmten Niveau stagniert. Steigt aber die Geburtenrate über 3, schwankt die Anzahl plötzlich von Generation zu Generation zwischen zwei Werten hin und her. Dieses Verhalten kann man durchaus noch als Stabilität deuten. Die Zahl B = 3,45 bedeutet die Überschreitung einer weiteren Grenze; jetzt schwankt die Population zwischen vier Werten. In immer kleineren Abständen folgen weitere Gabelungen und fortgesetzte Verdopplungen der Anzahl möglicher Systemzustände. Schließlich gibt es eine Grenzzahl, ab der das System in das Chaos eintritt. In der Grafik entspricht dies dem schwarzen Bereich. Hier kann praktisch nicht mehr vorhergesagt werden, welche Größe die Population in der nächsten Generation annehmen wird. Bei B = 4 wird sogar das ganze Intervall der Werte zwischen 0 und 1 ausgefüllt. Das Chaos scheint perfekt.

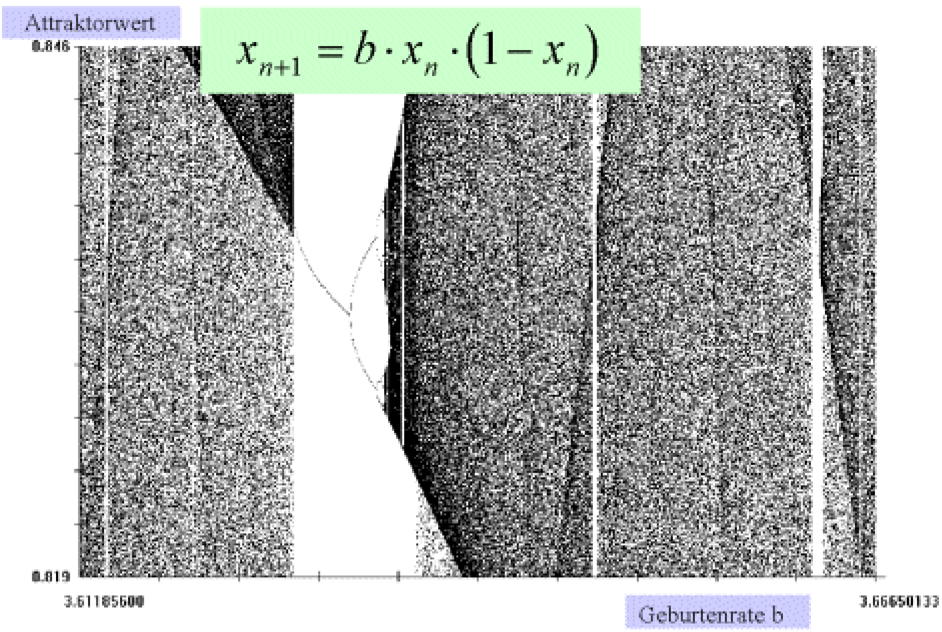
Wenn man genau hinsieht, erkennt man im chaotischen Bereich helle Streifen. Sie werden ‘Fenster der Ordnung’ genannt. Durch ein rotes Rechteck habe ich einen Ausschnitt markiert, den wir uns jetzt durch genauere Rechnung vergrößert ansehen wollen.

Dieser kleine Ausschnitt zwischen B = 3,35 und B = 3,78 umfasst einen Teil des Verzweigungsbaums und ein solches Fenster der Ordnung.



Zoom: Oben sieht man den vergrößerten Ausschnitt, der im vorigen Bild rot markiert ist.

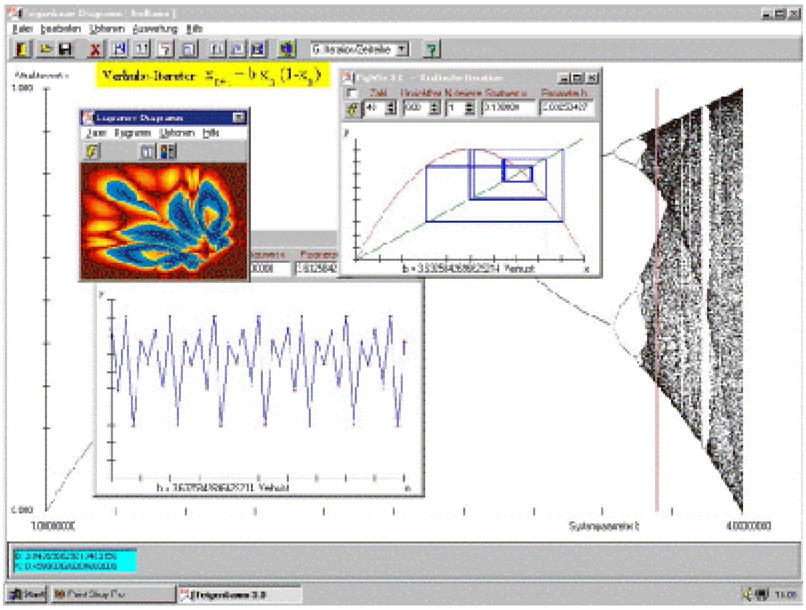
Ein erneutes Zoomen (rotes Rechteck) ergibt das folgende Bild im Ordnungsfenster des Chaos:



Hier zeigt sich mitten im Chaos wieder ein stabiles Systemverhalten, das sich allerdings erneut mit einem ‘Feigenbaumszenario’ in die Fänge des Chaos begibt, wenn man die Größe B nur ein klein wenig erhöht. Der Übergang ist wieder geprägt vom Verdopplungsweg der zunehmenden möglichen Systemgrößen, genannt der ‘Verdopplungsweg ins Chaos’. Auffällig ist, dass der Feigenbaum im Kleinen wieder kleine Feigenbäume enthält, die prinzipiell wie das Ganze aussehen. Man spricht von Selbstähnlichkeit oder von einem Fraktal, ein Begriff, zu dem ich gleich mehr sagen möchte. Man könnte den Zoomvorgang noch mehrere Male wiederholen und würde, bevor man die Rechenkünste des Computers überfordert, noch einige Feigenbäume in den Feigenbäumen entdecken.

Wenn eine so einfache Gleichung Chaos produzieren kann, gilt das erst recht für kompliziertere Systeme mit vielen Freiheitsgraden. Kleinste Veränderungen an den Systemgrößen zeigen im Chaosbereich unvorhersagbare Folgen. So wurde die von Kritikern oft missverstandene Metapher vom Flügelschlag eines Schmetterlings in China, der einen Wirbelsturm in den USA auslösen kann, geboren. Die verallgemeinerte Untersuchung chaotischer Systeme hat zu völlig neuen überraschenden Ergebnissen geführt und einen Umdenkungsprozess in unserer Weltanschauung ausgelöst. Es zeigte sich, dass eine ganze Gruppe von Systemen dem Feigenbaumszenario folgt, dass ein Verdopplungsweg ins Chaos führen kann, wenn man einen Systemparameter verändert. Dabei bleibt dieses Verhalten nicht auf mathematische Gleichungen beschränkt, sondern findet seine Entsprechung in natürlichen Systemen. Das konnte in den 80 er Jahren insbesondere in Strömungsexperimenten nachgewiesen werden. Ein Beispiel dafür könnte auch die Veränderung unserer Atmosphäre durch Einbringen von Schadstoffen sein, woraufhin das Klima in chaotische Schwankungen geriete. Also liefert auch die Mathematik genug Gründe, mit unseren Lebensgrundlagen vorsichtiger umzugehen.

U. Schwebinghaus



Weitere Informationen zum Programm Feigenbaum in Ulli's Fractal Home