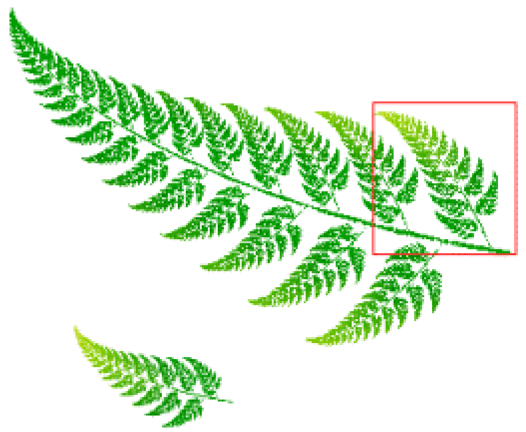
Lebendige Mathematik - Mathematik des Lebendigen

erschienen in **Wege der Weiterbildung** Heft 13 / 1996, Ring der Abendgymnasien

Von Studierenden höre ich oft die Ansicht, die Mathematik sei eine Wissenschaft, deren Inhalte für eine Abiturprüfung aber sonst eigentlich für weiter nichts taugten. Diese Ansicht kommt den reinen Mathematikern, die die Mathematik einzig als ein Geistesprodukt sehen, vielleicht sogar entgegen. Zwar gab es immer auch Menschen, die Anwendungen der Mathematik suchten oder gar neue mathematische Methoden zu bestehenden Problemen entwickelten. So wurde die Differentialrechnung, zu der unsere Studierenden gemischte Gefühle entwickeln, von Newton und seinen Zeitgenossen erfunden, um Bewegungen von Körpern zu berechnen. Doch es behielten in mathematischen Kreisen die Puristen für viele Jahrhunderte die Oberhand, die Mathematik als reine Geisteswissenschaft ohne Bezüge zur Natur betreiben wollten. Auf dem Höhepunkt dieser Bewegung galt sogar die Geometrie als ein Irrweg mathematischer Künste.



Seit dem Erscheinen eines bemerkenswerten Buches im Jahre 1977, das der Autor Benoit Mandelbrot selbst als Manifest bezeichnet, scheinen die Tage der reinen Mathematiker gezählt. Plötzlich gelangt die Geometrie zu neuer Blüte und die Anschauung findet in der Mathematik wieder ihren ihr zustehenden Platz. Der Titel dieses schwer lesbaren aber schönen Buches ***Die fraktale Geometrie der Natur*** zeigt, dass es um die Beschreibung von Natur mit geometrischen Mitteln geht. In den letzten 20 Jahren hat sich zur Überraschung vieler Wissenschaftler gezeigt, dass die fraktale Geometrie eine verbindende Brücke zwischen scheinbar unabhängigen Wissenschaften sein kann und ein Stück des verlorenen Überblicks in den Einzelwissenschaften wiederherstellt, indem sie gemeinsame Elemente z.B. in Biologie, Physik und den Wirtschaftswissenschaften aufzeigt. Um die Bedeutung der fraktalen Geometrie zu verstehen, muss man den Begriff *Fraktal* näher untersuchen. Mandelbrot selbst begründet die neue Sichtweise mit den folgenden Sätzen:

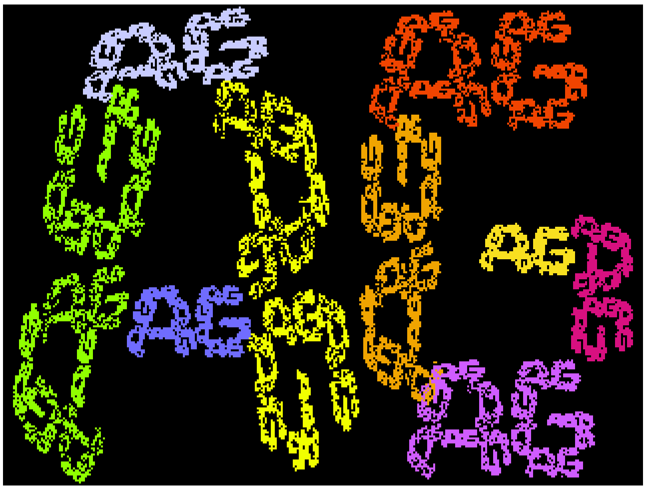
Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise. Die Rinde ist nicht glatt - und auch der Blitz bahnt sich seinen Weg nicht gerade. ... Die Existenz solcher Formen fordert uns zum Studium dessen heraus, was Euklid als formlos beiseite lässt, führt uns zur Morphologie des Amorphen. Bisher sind die Mathematiker jedoch dieser Herausforderung ausgewichen. Durch die Entwicklung von Theorien, die keine Beziehung mehr zu sichtbaren Dingen aufweisen, haben sie sich von der Natur entfernt. Als Antwort darauf werden wir eine neue Geometrie der Natur entwickeln und ihren Nutzen auf verschiedenen Gebieten nachweisen. Diese neue Geometrie beschreibt viele der unregelmäßigen und zersplitterten Formen um uns herum - und zwar mit einer Familie von Figuren, die wir Fraktale nennen werden...

Das Wort Fraktal wird aus einer Eigenschaft der angesprochenen Formen abgeleitet, nämlich der im Gegensatz zur topologischen Dimension gebrochenen (fractus = zerbrochen) Zahl, die den Zusammenhang zwischen linearer Ausdehnung und Flächeninhalt (oder Volumen) eines

Gebildes beschreibt. So gilt z.B. für den Flächeninhalt eines Quadrats A = a^2. Die Hochzahl 2 wird topologische Dimension des Quadrats genannt. Bei Fraktalen ist z.B. der Zuwachs der Fläche bei Vergrößerung einer vorhandenen Grundlänge größer als mit der Hochzahl 2 ausgedrückt werden kann; sie muss mit einem größeren nicht notwendig ganzzahligen Wert berechnet werden. Der Begriff trifft aber auch das Erscheinungsbild der Fraktale, die oft zerbrochen und stark zergliedert aussehen. Solche Formen mit nicht ganzzahliger Dimensionszahl haben eine weitere auffällige Eigenschaft, die den Betrachter besonders stark anspricht und berührt; sie sind selbstähnlich, d.h. die Gesamtstruktur eines Fraktals ist aus kleineren Strukturen zusammengesetzt, die die gleiche Form aufweisen. Man findet Selbstähnlichkeit nicht nur in geometrischen Gebilden, sondern z.B. auch in einem Gedicht von Joachim Ringelnatz:

Es stand schlecht um des Bandwurms Befinden,
ihn juckte immer etwas hinten.
Da konstatierte der Doktor Schmidt,
nachdem er den Leib aufgeschnitten,
dass dieser Wurm an Würmern litt,
die wiederum an Würmern litten...

Das Spiel mit Selbstähnlichkeiten macht auch einen Teil des Reizes der Bilder von Escher aus. Man betrachte einmal in einem Buch die Grafik Lebensweg II. Der Grund für die Faszination, die viele Menschen beim Ansehen fraktaler Bilder verspüren, ist vielleicht die bewusste oder unbewusste Wiedererkennung von Strukturen natürlicher Dinge. Fraktale Gebilde sind zentrale Bestandteile aller Lebewesen, wie der feinverzweigte Blutkreislauf oder das Nervensystem von Menschen und Tieren. Auch die unbelebte Natur zeigt diese Elemente in Wolken, Strömungen, Flussverläufen oder Küstenlinien. Ein anschauliches Beispiel für eine fraktale Form ist das Blatt eines Farns. Wenn man eines der Teilblätter abtrennt und sich vergrößert denkt, könnte man diesen Teil wieder für das ganze Blatt halten. Mit einem Teilblatt des Teilblattes könnte man diesen Prozess wiederholen und käme dann zum selben Ergebnis (siehe Bild oben). Nach einigen Prozessstufen muss man die Auflösung in immer feinere Teilblätter beenden, da natürliche Strukturen nicht beliebig fein werden können. Sie bestehen nämlich aus komplexen biologischen Systemen mit einer gewissen Mindestgröße. Der Vorteil der Mathematik ist es, dass es für den Verstand die Auflösungsgrenze nicht gibt. Mathematische Fraktale sind darum bis in unendlich feine Strukturen von der gleichen Gestalt.



Ein typographisches Fraktal: AG's die aus AG's aufgebaut sind, die wiederum aus AG's bestehen...

Die mathematischen Grundlagen, die hier nicht in Einzelheiten besprochen werden sollen (gelegentlich halte ich für die Studierenden dazu einen kleinen Vortrag), sind dabei für eine große Gruppe von Fraktalen relativ einfach. Es liegen einige geometrische Operationen wie zentrische Stauchung und Drehungen zugrunde, die schon viele Jahrzehnte bekannt sind. Aber erst zusammen mit einem vielstufigen Rückkopplungsprozess entwickeln sich daraus Fraktale. Viele Strukturen der Natur wie die Form von Gebirgen, Wolken, Flüssen, Bäumen, Blumenkohl, Farn, usw. lassen sich auf diese Weise erklären und künstlich nachbilden.

Alles das konnte erst in den letzten beiden Jahrzehnten entdeckt werden, weil die Entwicklung der Computer die Anschauung der angesprochenen Rückkopplungsprozesse verstärkte. So ist es mit einem geeigneten Computerprogramm auch mathematischen Laien möglich, die geometrischen Operationen auszuprobieren und fraktale Strukturen entstehen zu lassen. Überraschend und faszinierend dabei ist wie aus einfachen Prinzipien die scheinbar kompliziertesten Strukturen erwachsen.

In den Schulalltag werden diese neuen Erkenntnisse - wie alles - mit einiger Verspätung eintreten. Die ersten Vorboten sind allerdings bereits sichtbar: In Schulbuchverlagen gibt es die ersten Bücher zum Thema und auf Standardunterrichtswerken aus Mathematik, Physik und Informatik werden die Titelseiten mit fraktalen Bildern verziert; inhaltlich findet man in diesen Werken über Fraktale noch wenig oder gar nichts. Wer aufmerksam geworden ist und sich über Fraktale informieren will, findet eine Vielzahl von (mehr oder weniger) allgemein verständlichen Büchern..

U. Schwebinghaus