

F a c h a r b e i t

aus der

M a t h e m a t i k

<p>Chaostheorie – Die Logistische Gleichung –</p>
--

Verfasser: Thomas Soller

Leistungskurs: Mathematik

Kursleiter:

Bearbeitungszeitraum: K 12/2 – K 13/1

Abgabetermin: 01.02.2000

Erzielte Note:

Erzielte Punkte:
(einfache Wertung)

.....
Unterschrift Kursleiter

- Inhaltsverzeichnis -

	Seite
1. Allgemeine Wachstumsvorgänge.....	3
1.1 Unterscheidung explizit – rekursiv	3
1.2 Bedeutung der Iteration.....	4
1.3 Graphische Iteration	4
1.4 Langzeitverhalten linearer Rekursionsgleichungen	4
1.5 Fixpunkte und Zyklen	5
1.6 Eigenschaften der Attraktoren	6
2. Die logistische Gleichung.....	7
2.1 Die Verhulst-Formel.....	7
2.2 Transformationen in die logistische Gleichung.....	8
2.3 Fixpunktuntersuchung.....	9
2.4 Entdeckung eines 2-Zyklus	10
2.5 Stabilitätsbedingung für periodische Punkte.....	10
2.6 Bestimmung der Stabilität des 2-Zyklus	11
2.7 Bifurkation	12
2.8 Die Feigenbaumkonstanten	12
2.9 Grenze des Bifurkations-Szenarios.....	12
3. Das Feigenbaumdiagramm	13
3.1 Inseln der Ordnung	14
3.2 Intermittenz.....	15
3.3 Strecken und Falten.....	15
3.4 Definition chaotischen Verhaltens.....	17
3.5 Ergebnisse der Chaosforschung.....	18
4. Anhang.....	19
4.1 Graphische Iteration	19
4.2 Überblick über das Verhalten der log. Gleichung	20
5. Literaturverzeichnis	21
6. Selbständigkeitserklärung.....	22

1. Allgemeine Wachstumsvorgänge

Die Wachstumsvorgänge in Natur, Technik oder Wirtschaft werden nach drei Arten unterschieden:

- a) lineares Wachstum
- b) exponentielles Wachstum
- c) logistisches Wachstum

Während die ersten beiden, vertrauten Typen potentiell alle Grenzen überschreiten, behandelt das logistische Wachstum Dynamiken mit beschränkten Ressourcen. Bei der Untersuchung der log. Gleichung werden wir ein unerwartet komplexes Verhalten antreffen und schließlich auf das Phänomen »Chaos« stoßen.

Alle betrachteten Wachstumsvorgänge sollen **diskret** ablaufen, d.h. die Zunahme erfolgt schrittweise nach Verstreichen einer definierten Zeiteinheit. Somit läßt sich die Entwicklung in Form einer **Zahlenfolge**, auch als **Zeitreihe** bezeichnet, darstellen.

1.1 Unterscheidung explizit - rekursiv

Zur Beschreibung der Wachstumsvorgänge eröffnen sich zwei Darstellungsformen: die explizite und die rekursive.

In der **expliziten Darstellungsform** wird der Wert eines Folgengliedes in Abhängigkeit von seiner Position in der Folge und einem festgelegten Startwert ausgedrückt.

Beispiel: $x_n = f(x_1) = nx_1 + 5$

In der **rekursiven Darstellung** wird jedes Folgenglied durch Rückgriff auf einen oder mehrere Vorgänger ausgedrückt.

Beispiel: $x_{n+1} = f(x_n) = 2x_n + 6$

Die allgemeine Form **linearer Rekursionsgleichungen** lautet somit:

$$x_{n+1} = ax_n + b$$

Die wiederholte Anwendung dieser Gleichung zur Berechnung der Folgenglieder wird als **lineare Iteration** bezeichnet. Zur Überführung der linearen Rekursionsgleichung in die explizite Form verwendet man den Ausdruck (Beweis siehe Athen, R&M, S. 359f):

$$x_n = a^n x_1 + b \frac{1 - a^n}{1 - a} \quad (1.1)$$

Sonderfälle: $a=1$: $x_n = x_1 + nb$ (arithmetische Folge, lin. Wachstum)

$b=0$: $x_n = a^n x_1$ (geometrische Folge, exp. Wachstum)

1.2 Bedeutung der Iteration

Jeder Wachstumsvorgang, auch der logistische, wie wir später noch sehen, kann auf die Iteration von Funktionen zurückgeführt werden. Dabei wird ein Zustandsraum X durch eine Funktion f auf sich selbst abgebildet ($f: X \rightarrow X$). Nachdem ein Anfangswert x_1 festgelegt ist, werden die Zustände $x_1, x_2 = f(x_1), \dots$ sukzessive durchlaufen, man sagt, die einzelnen **Phasenpunkte** unterliegen einem **Phasenfluß**.

Wir kürzen $f(f(f(\dots(x_1)\dots)))$ in Zukunft durch $f^n(x_1)$ ab und bezeichnen dies als **n-fach Iterierte** von $x_1, n \in \mathbb{N}$.

Die entstehende Punktfolge $x_1, f(x_1), \dots$ heißt **dynamischer Prozeß**, **Trajektorie** oder **Orbit** von x_1 .

1.3 Graphische Iteration

Zur Veranschaulichung des Orbits wählt man häufig eine visuelle Darstellungsform, die **graphische Iteration**. Hierzu benötigt man sowohl das Schaubild der Funktion als auch die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten. Detaillierter wird das Verfahren in Anhang 4.1 beschrieben, die Grundidee ist folgende:

»Wir beginnen, indem wir x_1 auf der x-Achse markieren. Nun zeichnen wir eine Vertikale von x_1 bis zur Kurve. Von diesem Schnittpunkt aus zeichnen wir eine Horizontale bis zur Winkelhalbierenden. Von dort aus wieder eine Vertikale bis zur Kurve usw. Warum funktioniert dieses Vorgehen? Ganz einfach, weil Punkte auf der Winkelhalbierenden von beiden Achsen denselben Abstand haben.« (Peitgen, Bausteine, S. 73)

1.4 Langzeitverhalten linearer Rekursionsgleichungen

Somit kann man auch graphisch das Langzeitverhalten der linearen Iteration verfolgen (vgl. Abschnitt 4.1). Wir wollen dies nun jedoch streng algebraisch erörtern. Dazu formen wir Gleichung 1.1 um:

$$x_n = a^n x_1 + b \frac{1 - a^n}{1 - a} = a^n \left(x_1 - \frac{b}{1 - a} \right) + \frac{b}{1 - a}$$

Anschließend untersuchen wir das Grenzverhalten der Iteration für unterschiedliche Werte von a , wobei a der Steigung des Funktionsgraphen entspricht.

1. Für $ a > 1$:	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[a^n \left(x_1 - \frac{b}{1 - a} \right) + \frac{b}{1 - a} \right] = \infty$	(1.2)
2. Für $ a < 1$:	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[a^n \left(x_1 - \frac{b}{1 - a} \right) + \frac{b}{1 - a} \right] = \frac{b}{1 - a}$	(1.3)
3. Für $a = +1$:	$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + nb) = \infty$	(1.4)
4. Für $a = -1$:	Es existiert kein Grenzwert, die Folge alterniert zwischen $\left(x_1 - \frac{b}{2} \right) + \frac{b}{2} = x_1$ und $-\left(x_1 - \frac{b}{2} \right) + \frac{b}{2} = -x_1 + b$	

1.5 Fixpunkte und Zyklen

Augenscheinlich entschwindet der Orbit eines beliebigen Startwerts nur bei $|a| < 1$ nicht ins Unendliche, sondern nähert sich einem Grenzwert oder auch Fixpunkt¹ (Fall 2). Dieser Fixpunkt ist identisch mit dem Schnittpunkt des Graphen und der 45°-Linie des I. und III. Quadranten.

Beweis: $f(x^*) = x^* \Leftrightarrow ax^* + b = x^* \Leftrightarrow x^* - ax^* = b \Leftrightarrow x^* = \frac{b}{1 - a}$

Bemerkenswert ist ebenso Fall 4: Die Iteration pendelt immerfort zwischen zwei - je nach Startwert unterschiedlichen - Punkten hin und her. Wir wollen nun die gesammelten Ergebnisse zusammenfassen:

¹ Auf eine Unterscheidung von »Grenzwertpunkt« und »Fixpunkt« wird verzichtet, beide Begriffe werden, ebenso wie »Rekursion« bzw. »Iteration«, synonym verwendet.

DEFINITION I

1. x^* heißt **Fixpunkt** von f , wenn $f(x^*) = x^*$.
2. Die Steigung des Graphen im Fixpunkt kann als Maß für das Langzeitverhalten der Iteration betrachtet werden.
3. Gilt $|f'(x^*)| < 1$, so heißt x^* **stabil, anziehend** oder **Attraktor**.
4. Ist $|f'(x^*)| > 1$, so heißt x^* **instabil, abstoßend** oder **Repellor**.
5. Sonderfälle: Grenzwertpunkte mit $|f'(x^*)| = 0$ heißen superstabil, Grenzwertpunkte mit $|f'(x^*)| = 1$ dagegen indifferent.

Das zweite Verhalten, dem wir begegnet sind, ist die periodische Wiederkehr von Funktionswerten. Darum legen wir fest:

DEFINITION II

1. x_1 heißt 2-periodischer Punkt von f , wenn $f(f(x_1)) = x_1$.
Allgemein: x_1 heißt **n-periodischer Punkt**, wenn $f^n(x_1) = x_1$.
2. Da offensichtlich jeder Fixpunkt (s. Definition 1.1) n-periodisch ist, wird x_1 als **echt n-periodisch** bezeichnet, wenn gilt:
 $f^n(x_1) = x_1$, aber $f^m(x_1) \neq x_1$ für alle $m < n$.
3. Als **n-Zyklus** wird sowohl der Orbit $x_1, x_2, \dots, x_n, x_1, \dots$ als auch die Menge $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ echt n-periodischer Punkte x_1 bezeichnet.

1.6 Eigenschaften der Attraktoren

Wir wollen nun die Attraktoren genauer untersuchen. Aus Gleichung 1.3 ist ersichtlich, dass der Grenzwert der Iteration vom Startwert nicht abhängt. Allgemein versteht man unter dem **Einzugsbereich** oder auch Bassin eines Attraktors diejenige Menge an Startwerten, deren Orbit $f^n(x)$ gegen x^* konvergiert, es gilt also: $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^*$.

Das Bassin des Fixpunkts aus Gleichung 1.3 ist folglich \mathbb{R} .

Eine weitere Eigenschaft der stabilen Fixpunkte ist, dass eine beidseitige **Umgebung** $U(x^*)$ existiert, die **vollständig** zum Einzugsbereich von x^* gehört. Beweis siehe Sternemann, LKDD, S. 31f.

Somit endet der Orbit auch bei kleinen Startwertfluktuationen auf dem Fixpunkt, d.h. Unempfindlichkeit gegenüber geringen Schwankungen in den Ausgangsbedingungen. Bei den chaotischen System hingegen werden wir eine sensitive Abhängigkeit von den Ausgangsbedingungen kennenlernen, die schon bei minimalsten Abweichungen in den Startparametern zu gänzlich anderem Systemverhalten führt.

Nach Klärung der wichtigsten Begriffe können wir uns nun dem eigentlichen Thema, der logistischen Gleichung, widmen. Obwohl wir bisher nur lineare Funktionen betrachtet haben, sind die Ergebnisse auch auf gekrümmte Graphen übertragbar, da sie sich in einer hinreichend kleinen Umgebung wie ihre Tangenten verhalten. Ausführlicher behandelt Sternemann, LKDD, S. 52ff diese Thematik.

2. Die logistische Gleichung

Eine ihr verwandte Gleichung zur Beschreibung der Populationsdynamik wurde erstmals 1845 von dem belgischen Mathematiker Pierre François **Verhulst** verwendet. Die simple Grundidee soll anhand eines Beispiels erläutert werden.

2.1 Die Verhulst-Formel

Eine Insel mit begrenzten Ressourcen wird von einer Spezies bewohnt, die sich im Lauf der Zeit vermehrt. Je mehr Individuen vorhanden sind, desto knapper werden die Nahrungsmittel. Sind zuwenig Ressourcen vorhanden, um die Population ausreichend zu versorgen, nimmt die Bevölkerungszahl ab.

Die Insel kann gleichzeitig höchstens N Individuen ausreichend ernähren. Der Quotient aus absoluter Anzahl und N gibt die relative Populationszahl an, welche es ermöglicht, unterschiedliche Systeme miteinander zu vergleichen. Beträgt sie »1«, so ist die maximale, von der Insel simultan tragfähige Bevölkerungszahl erreicht. Zum Zeitpunkt n sei die relative Populationszahl p_n , die nächst folgende ist somit p_{n+1} .

Mithin gibt das Verhältnis $\frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} = z$ die Wachstumsrate an.

z ist nicht konstant, da bei $p_n \ll 1$ die Bevölkerung (fast) exponentiell anwächst (Nahrung im Überfluß), während bei $p_n > 1$ die Anzahl der Individuen abnehmen muß, also $z < 0$.

$$\text{Verhulst setzte zur Erfüllung dieser Forderung: } \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n} \propto 1 - p_n \quad (1.5)$$

Dadurch entsteht eine direkte Rückkopplung zur vorangehenden Populationszahl. Führt man den Proportionalitätsfaktors a (welcher als ein Maß für die Fruchtbarkeit der Insel gelten kann) ein und formt man Gleichung 1.5 um, so erhält man die sog. **Verhulst-Gleichung**:

$$p_{n+1} = p_n + ap_n(1 - p_n) = (1 + a)p_n - ap_n^2 \quad (1.6)$$

2.2 Transformationen in die logistische Gleichung

Aus Normierungsgründen wird häufig mit der **logistischen Gleichung**

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad 0 \leq r \leq 4 \quad (1.7)$$

gearbeitet, da sie für diese Werte des Systemparameters r das Einheitsintervall $[0,1]$ auf sich selbst abbildet. An der äquivalenten Form

$$x_{n+1} = rx_n - rx_n^2$$

erkennt man, dass sie analog der Verhulst-Gleichung 1.6 aufgebaut ist. Ein linearer, »antreibender« Term und ein quadratischer, »bremsender« Term bestimmen den Iterationsverlauf. Anders als bei den linearen Rekursionsgleichungen kann für die logistische Gleichung **keine explizite**, für alle r gültige **Darstellungsform** gefunden werden. Die Gründe hierfür werden wir noch aufführen.

Der ähnliche Aufbau der beiden Gleichungen führt auch zu einem ähnlichen Verhalten, was durch eine geeignete Transformation der Parameter nachgewiesen werden kann.

Setzt man $x_n = \frac{a}{a+1}p_n$ und $r = a+1$ unter Berücksichtigung der Gleichungen 1.6 bzw. 1.7, so ergibt dies einerseits:

$$x_{n+1} = \frac{a}{a+1}p_{n+1} = \frac{a}{a+1}(p_n + ap_n(1 - p_n)) = ap_n - \frac{a^2}{a+1}p_n^2 \quad (1.8)$$

und andererseits:

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n) = (a+1)\frac{a}{a+1}p_n\left(1-\frac{a}{a+1}p_n\right) = ap_n - \frac{a^2}{a+1}p_n^2 \quad (1.9)$$

womit der Beweis erbracht ist.

Allgemein: Für jedes Polynom 2. Grades $ax^2 + bx + c$ existiert, zumindest für bestimmte Koeffizienten a, b, c , eine geeignete Transformation in die logistische Gleichung (vgl. Sternemann, LKDD, S. 136f)

Im Folgenden wollen wir die logistische Gleichung in Hinblick auf Fixpunkte, Zyklen und Änderungen im Systemverhalten bei Variation des Kontrollparameters r betrachten. Zum besseren Verständnis sind in **Anhang 4.2** illustrierende Diagramme abgedruckt.

2.3 Fixpunktuntersuchung

Die Fixpunktbedingung (nach Definition 1.1) $f(x^*) = x^*$ ist erfüllt für:

$$x_1^* = 0 \quad \text{und} \quad x_2^* = \frac{r-1}{r} \quad (\text{Rechnung gekürzt}) \quad (1.10)$$

Über die Stabilität dieser Fixpunkte entscheidet die erste Ableitung:

$$f'(x) = (rx(1-x))' = r - 2rx \Rightarrow f'(x_1^*) = r; \quad f'(x_2^*) = 2 - r$$

Bekanntlich ist ein Fixpunkt als stabil anzusehen, wenn gilt: $|f'(x^*)| < 1$ (siehe Definition 1.3). Somit ist immer einer der beiden Fixpunkte stabil, wenn $r \in [0;3]$. Weiterhin bedingt die Stabilität von x_2^* die Instabilität von x_1^* .

Für $0 < r < 1$ gerät der Orbit zwangsläufig in den Nullpunkt-Attraktor, da x_2^* noch nicht existent ist, d.h. die Population würde aussterben.

Für $1 < r < 3$ konvergiert die Iteration gegen den Wert x_2^* , denn der instabile Fixpunkt x_1^* stößt jeden in seine Nähe gelangenden Phasenpunkt ab. Folglich ändert sich das Systemverhalten der logistischen Gleichung qualitativ nicht.

Die Behauptung, jeder Startwert gelangt letztendlich in den Einzugsbereich des Attraktors, da das Intervall $[0,1]$ nicht verlassen werden kann², erscheint zwar intuitiv richtig, kann aber natürlich nicht als Beweis gelten. Hierzu sei auf Sternemann, LKDD, S. 35f und insbesondere auf den »Banachschen Fixpunktsatz« verwiesen.

Iterator	
$x_{n+1} = rx_n(1-x_n); r = 2,5$	
Iterations-schritt	Phasenpunkt x_n
1	0,3
2	0,525
3	0,6234375
4	0,586907959
5	0,606117517
6	0,596847682
7	0,601551316
8	0,599218325

Zur empirischen Überprüfung dieses Ergebnisses sind Experimente mit dem Taschenrechner sehr gut geeignet.

Wählen wir $r = 2,5$; $x_1 = 0,3$ und führen einige Iterationen durch, so ergibt sich nebenstehende Wertetabelle, die unsere Ergebnisse bestätigt:

Der Orbit nähert sich $x_2^* = \frac{2,5-1}{2,5} = 0,6$ an.

2.4 Entdeckung eines 2-Zyklus

Was geschieht nun, wenn wir einen geringfügig höheren Wert für r als »3« setzen, z.B. $r = 3,05$; $x_1 = 0,3$? Eine erneute Berechnung des dynamischen Prozesses liefert folgende Tabelle (s. rechts):

Offensichtlich zeigt die Iteration, je länger sie durchgeführt wird, ein 2-Zyklus ähnliches Verhalten (vgl. Abschnitt 1.5).

Iterator	
$x_{n+1} = rx_n(1-x_n); r = 3,05$	
Iterations-schritt	Phasenpunkt x_n
1	0,3
2	0,6405
3	0,702292238
4	0,637687444
...	...
125	0,737704749
126	0,590164179
127	0,737704784
128	0,590164129

Möglicherweise war nur die spezielle Wahl unseres Startwerts der Grund für dieses Ergebnis. Deshalb wollen nun allgemein die log. Gleichung auf 2-periodische Punkte untersuchen.

Die Bedingung hierfür lautet wie folgt (siehe Definition 2.1):

$$f^2(x) = r(rx(1-x)) - r(rx(1-rx))^2 = x$$

Dabei entsteht eine Gleichung 4. Grades, welche durch Polynomdivision mit den beiden unecht 2-periodischen Punkten aus Gleichung 1.10 auf

² Diese Tatsache wird als **Invarianz** bezeichnet.

den Grad »2« reduziert und anschließend gelöst wird. Wir wollen diese Rechnung stark kürzen und nur das Ergebnis betrachten.

$$x_{1/2}^{**} = \frac{1+r \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r} \quad (1.11)$$

In unserem speziellen Fall war $r=3,05$, so dass nur folgende Punkte einen Zyklus der Periode 2 bilden sollten:

$$x_1^{**} = \frac{4,5}{6,1} \approx 0,73770 \dots \text{ und } x_2^{**} = \frac{3,6}{6,1} \approx 0,59016 \dots$$

Anscheinend geraten auch Punkte in einer Umgebung von $x_{1/2}$ in einen Grenzyklus der Länge »2«. Dieses Verhalten ist uns bereits bei den stabilen Fixpunkten aus Abschnitt 2.3 begegnet, und es erhebt sich die Frage, ob hier ebenfalls eine Art »Attraktor« vorliegt.

2.5 Stabilitätsbedingung für periodische Punkte

Auf die allgemeine Herleitung des Stabilitätskriteriums für periodische Punkte sei hier verzichtet (vgl. Loistl, Chaos, S. 26), wir begnügen uns mit den Ergebnissen und den daraus resultierenden Folgerungen.

DEFINITION III

1. Ein **n-Zyklus** heißt **stabil, anziehend** oder **n-Punkt-Attraktor**, wenn für alle seine Mitglieder gilt: $\left| (f^n)'(x) \right| < 1$.
2. Ein **n-Zyklus** wird als **instabil, abstoßend** oder **n-Punkt-Repellor** bezeichnet, wenn für alle x des Zyklus: $\left| (f^n)'(x) \right| > 1$
3. Sonderfälle: Ein n -Zyklus heißt **superstabil (indifferent)**, wenn für alle seine Mitglieder gilt: $\left| (f^n)'(x) \right| = 0 \left(\left| (f^n)'(x) \right| = 1 \right)$.

Damit ist es uns gelungen, Definition 1 bzw. 2 zu vereinen und auf eine gemeinsame Basis zu stellen.

Die in Abschnitt 1.5 sowie 2.3 besprochenen **Fixpunkte** waren folglich nichts anderes als »**Ein-Punkt**«-Attraktoren, ein Spezialfall der n -periodischen Punkte, weshalb die selben **Eigenschaften** auf alle stabilen n -Zyklen **übertragbar** sind. Beispielsweise ist der Einzugsbereich der stabilen 2-periodischen Punkte ebenfalls das gesamte Einheitsintervall (siehe Abschnitte 1.6 bzw. 2.3). Dennoch sei ausdrücklich darauf

hingewiesen, dass die Iteration sowohl des 1-Punkt-Attraktors als auch des stabilen n-Zyklus einen Grenzwertprozess darstellt. Jeder Startwert, von den Mitgliedern des Zyklus abgesehen, nähert sich dem n-Zyklus beliebig an, erreicht ihn aber niemals.

2.6 Bestimmung der Stabilität des 2-Zyklus

Kehren wir aber nun zu unserem Ausgangsbeispiel, den 2-periodischen Punkten, zurück. Das Stabilitätskriterium lautet dann gemäß Definition 3.1 und unter Mitverwendung der Kettenregel wie folgt:

$$\begin{aligned} \left| (f^2)'(x_1) \right| &= |f'(f(x_1)) \cdot f'(x_1)| = |f'(x_2) \cdot f'(x_1)| \\ |f'(x_2) \cdot f'(x_1)| &= |r(1-2x_2) \cdot r(1-2x_1)| = |r^2(1-2x_2)(1-2x_1)| \\ \left| (f^2)'(x_1) \right| < 1 &\Leftrightarrow |r^2(1-2x_2)(1-2x_1)| < 1 \Leftrightarrow -1 < r^2(1-2x_2)(1-2x_1) < 1 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der in Gleichung 1.11 gefundenen Ergebnisse und Lösung des Ungleichungssystems erhält man:

$$\mathbf{3 < r < 1 + \sqrt{6}, \text{ also } r \in]3; 3,4494...[}$$

Für diesen Parameterbereich rastet die Trajektorie aller Startwerte auf einem Grenzyklus der Länge »2« ein.

2.7 Bifurkation

Als **Bifurkation** wird die qualitative Änderung des Systemverhaltens, hier eine Periodenverdopplung, bezeichnet.

Bei Werten $3,4494 \dots < r < 3,5440 \dots$ verliert der 2-Zyklus seine Stabilität, ein 4-Zyklus tritt in den Vordergrund. Von nun an setzt sich die Periodenverdopplung in immer kürzeren Abständen fort, bis zu einem Wert r_∞ , bei dem ein 2^∞ -Zyklus vorliegt. Ob man hier allerdings noch von einem Zyklus sprechen kann, erscheint fraglich; die Iteration kehrt niemals zu ihrem Ausgangspunkt zurück.

2.8 Die Feigenbaumkonstanten

Die Leistung des amerikanischen Mathematikers Mitchell **Feigenbaum** ist es, einen universell gültigen Zusammenhang zwischen den Abständen der Bifurkationsstellen r_n gefunden zu haben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta r_n}{\Delta r_{n+1}} = \delta = 4,669201... \quad (1.12)$$

Auch für die senkrechten Abstände der Gabelenden im Feigenbaumdiagramm (vgl. Abschnitt 3) gelang es ihm, eine Beziehung abzuleiten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha = 2,5029...$$

δ und α sind, ebenso wie π und e , transzendente Zahlen, und scheinen vielen (deterministisch-)chaotischen Systemen (siehe hierzu auch Abschnitt 3.3) innewohnenden Konstanten zu sein.

2.9 Grenze des Bifurkations-Szenarios

Nach Gleichung 1.12 bilden die Abstände der Bifurkationspunkte eine geometrische Reihe, womit eine Berechnung von r_∞ möglich ist:

$$r_\infty = 3,5699...$$

Bei r_∞ ist das Verhalten völlig ungeordnet, doch was geschieht, wenn man den Systemparameter r über r_∞ hinaus erhöht?

Um uns einen Überblick zu verschaffen, tragen wir die angelaufenen Punkte x in Abhängigkeit von r in einem Diagramm auf. Es zeigt sich folgendes Bild:

3. Das Feigenbaumdiagramm

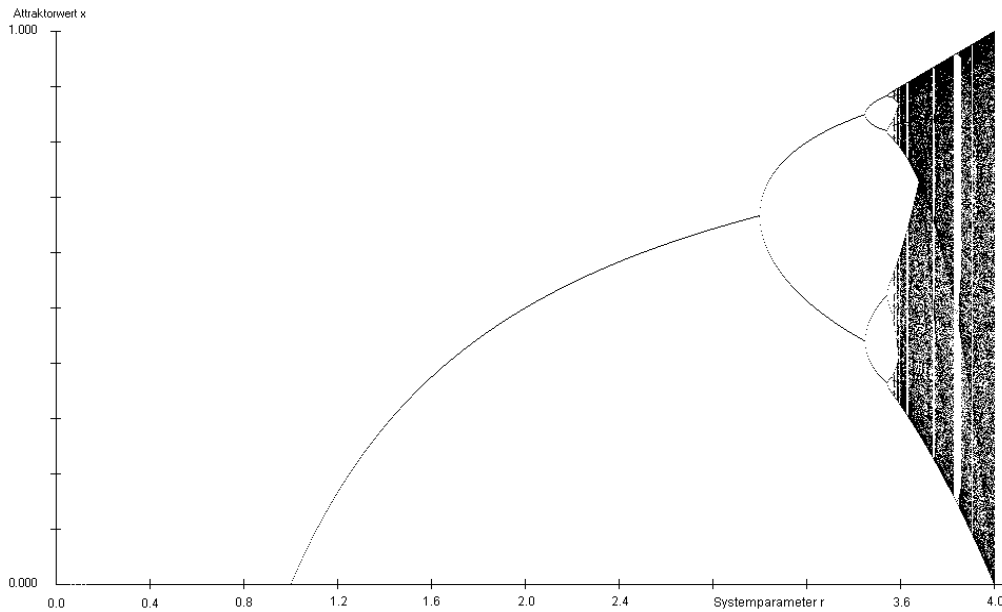


Abb.1

Eine bizarre Struktur wird sichtbar, die auf den ersten Blick für mehr Verwirrung als Klarheit sorgt. Doch betrachten wir das Diagramm abschnittsweise, so sehen wir bereits Nachgewiesenes bestätigt:

Für $0 < r < 1$ ist der Iterationsgrenzwert 0, bei $1 < r < 3$ strebt er gegen $\frac{r-1}{r}$ und ab $3 < r < 3,5699\dots$ kann man deutlich die Bifurkationskaskade erkennen.

Danach ist das Verhalten, abgesehen von den weißen Streifen (siehe Abschnitt 3.1), buchstäblich unberechenbar; der Orbit scheint ganze Teilintervalle beliebig dicht auszufüllen³. In diesem Zusammenhang spricht man auch vom **chaotischen Attraktor**.

Untersuchungen haben ergeben, dass kurz nach r_∞ das Einheitsintervall in 2^k Teilintervalle zerlegt werden kann, in die der Orbit nach 2^k Iterationen wieder zurückkehrt, jedoch nicht mehr auf den Ausgangspunkt. Für bestimmte r verschmelzen die 2^k zu 2^{k-1} Intervallen, bis schließlich bei $r = 4$ das gesamte Einheitsintervall beliebig dicht ausgefüllt wird (vgl. Loistl, Chaos, S. 31)

Wiederum wird das Verhältnis zwischen den Abständen dieser **inversen Bifurkationspunkte** durch die Konstante δ beschrieben wird, welche selbst im chaotischen Bereich Gültigkeit besitzt.

³ Kritische Stimmen könnten einwenden, dass evtl. dennoch ein Zyklus, wenn auch sehr hoher Ordnung, vorliegt. Bei der Behandlung dieser Frage stößt man schnell auf tiefere algebraische Probleme, deren Behandlung den Rahmen dieser Facharbeit überschreiten würde.

3.1 Inseln der Ordnung

Bemerkenswert sind die weißen Streifen im Feigenbaum-Diagramm. Sie werden als »**Inseln der Ordnung**« bezeichnet und markieren stabiles Verhalten. Ein besonders auffälliges Ordnungsfenster liegt zwischen $3,8284... < r < 3,8425...$ und

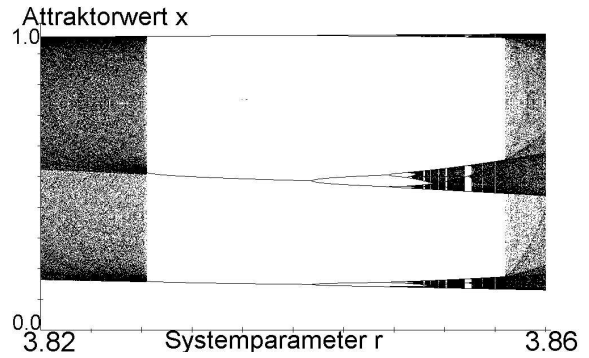


Abb. 2: Ausschnittvergrößerung aus Abb. 1

offenbart einen **3-Zyklus** (siehe Abb. 2). Wie kann man sich dies erklären? Betrachten wir hierzu die 3-fach Iterierte von f für zwei verschiedene Werte von r :

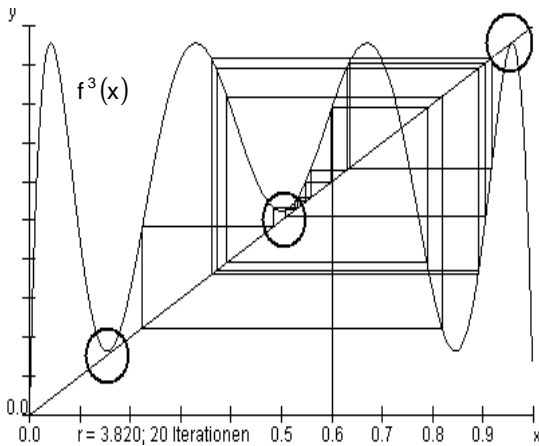


Abb. 3

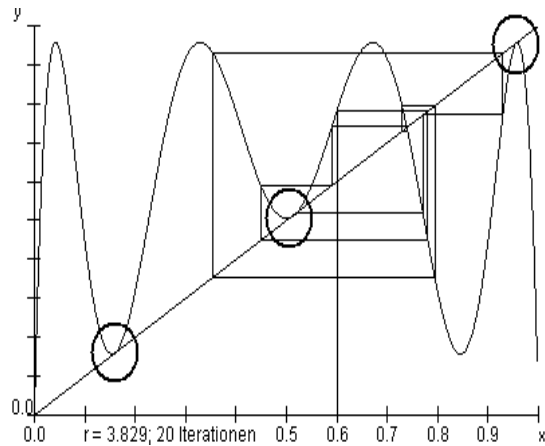


Abb. 4

Wir erkennen qualitativ: Erst bei $r = 1 + \sqrt{8} \approx 3,8284...$ (Nachweis durch Rechnung möglich, jedoch umfangreich⁴) berührt $f^3(x)$ mehr als zwei mal (die bereits bekannten Schnittpunkte aus Gleichung 1.10) die 45° -Linie; die Steigung in diesen neuen Schnittpunkten ist kleiner »1«.

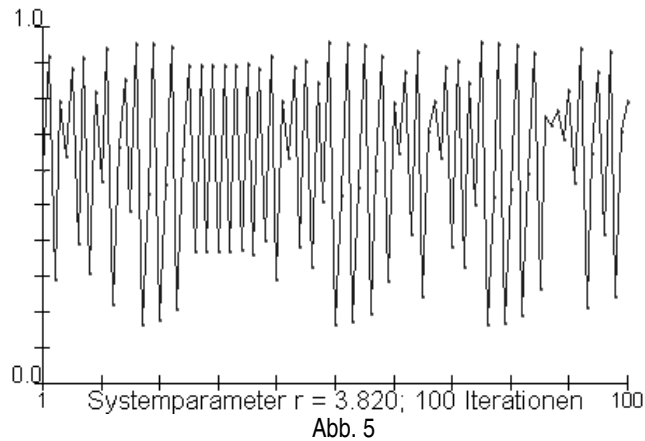
Deshalb ist dieser 3-Zyklus laut Definition 3.1 stabil.

Erhöht man r weiter, so kommt es wieder zur bereits bekannten Bifurkationskaskade, die bei einem Wert $r_{\infty 2}$ ihr Ende findet. Innerhalb des Feigenbaumdiagramms gibt es unendlich viele Ordnunginseln.

Das Auftreten der selben konstituierenden Merkmale auf unterschiedlichen Ebenen wird als **Skaleninvarianz** oder **Selbstähnlichkeit** bezeichnet und ist eine Eigenschaft der **Fraktale**.

3.2 Intermittenz

Der Übergang von der Ordnung ins Chaos erfolgt durch stetig fortschreitende Bifurkation. Umgekehrt wird durch **Intermittenz**⁵ im irregulären Bereich die nahende Ordnung angekündigt. Zur Verdeutlichung betrachten wir die zu Abb. 3 gehörige Zeitreihe:



Man erkennt eine wiederholt auftauchende, 3-Zyklus ähnliche Sequenz. Die graphische Iteration aus Abb. 3 gibt eine Erklärung hierfür: Gerät der Orbit in die Nähe der Fast-Berührungspunkte, so scheint das Verhalten regelmäßig. Dieser Zustand, die **laminare Phase**, ist durch das Fehlen von Fixpunkten nicht von Dauer, führt aber dazu, dass die Phasenpunkte gehäuft in der Umgebung der entstehenden Fixpunkte auftreten (Erklärung für die Schwärzungen in Abb. 2).

3.3 Strecken & Falten

Nachdem wir sowohl die beiderseitigen Übergänge, als auch den regulären Bereich der logistischen Gleichung untersucht haben, fehlt noch die Charakterisierung des chaotischen Verhaltens. Dabei zeigt sich, dass zwei diametrale Prozesse gleichzeitig ablaufen.

Die **Streckeigenschaft** für sich allein genommen bewirkt, dass benachbarte Punkte im chaotischen Attraktor exponentiell auseinander laufen. Aus diesem Grund verhalten sich die Trajektorien nur minimal

⁴ Die Bedingung für 3-periodische Punkte (s. Definition 2.1) liefert ein Polynom 8. Grades, das nicht mehr elementar gelöst werden kann. Durch die zusätzliche Forderung nach Superstabilität und unter Verwendung der Cardanischen Formeln ist dennoch der Beweis möglich.

⁵ Intermittenz bedeutet, dass (bei konstantem Systemparameter) irreguläre Bewegungsphasen durch zeitweise reguläres Verhalten abgelöst werden.

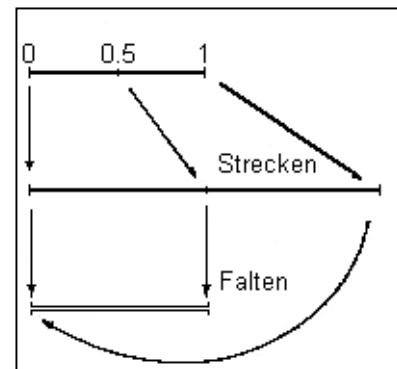
abweichender Startwerte nach kurzer Zeit so, als wären sie völlig unabhängig voneinander⁶. Man sagt, die Abbildung besitzt eine

sensitive Abhängigkeit von den Startbedingungen.

Zur Verdeutlichung sei ein einfaches Beispiel betrachtet. Wir wählen $r = 4$ und lassen die Iteration in zwei Schritten ablaufen:

1. Streckung des Einheitsintervalls auf die doppelte Länge
2. Faltung auf die ursprüngliche Länge

Verfolgt man nur den ersten Schritt für die beiden Punkte $x_1 = 0,5$ und $x_2 = 1$, so erkennt man deutlich, wie sich diese Startwerte voneinander entfernen. Auf die selbe Weise expandieren alle Elemente in einer Umgebung von x_1 ⁷.



Allgemein: Sei Δx_1 der ursprüngliche Abstand zweier benachbarter Punkte, so ist dieser nach n Iterationen auf $\Delta x_n = \Delta x_1 e^{\lambda n}$ angewachsen.

λ , der sogenannte **Lyapunov-Exponent**, kann als ein Indikator für Ordnung bzw. Chaos dienen. Ist $\lambda < 0$, so nimmt der Abstand benachbarter Startwerte ab (**Intervallkompression**), folglich konvergieren ihre Orbits. Für $\lambda > 0$ hingegen entfernen sie sich immer stärker voneinander (**Intervallexpansion**). Die Möglichkeiten zur Bestimmung von λ sind bei Loistl, Chaos, S. 56ff nachzulesen.

Die **Falteeigenschaft**, als Gegenspieler zur Streckung, führt einerseits zur Invarianz und andererseits zur **Nichtinvertierbarkeit** der Abbildung, d.h. einem Phasenpunkt können mehrere Vorgänger zugeordnet werden .

Diese beiden Prozesse zusammen bestimmen die Dynamik chaotischen Verhaltens und bewirken, dass man für je zwei offene, beliebig kleine

⁶ Diese Tatsache wird auch, nach E. Lorenz, als »Schmetterlingseffekt« bezeichnet. Der historische Hintergrund hierfür ist bei Peitgen, Bausteine, S. 59ff beschrieben.

Intervalle I und J Anfangswerte in I finden kann, die durch Iteration nach J gelangen⁸. Dieses Merkmal bezeichnet man als

Mischen bzw. topologische Transitivität.

3.4 Definition chaotischen Verhaltens

Damit stehen uns Möglichkeit zur Charakterisierung chaotischen Verhaltens zur Verfügung. Eine der bekanntesten und am meisten zitierten Chaosdefinitionen⁹ macht sich diese Eigenschaften zu nutze.

Die Definition von Chaos nach Devaney¹⁰

Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Abbildung $f : J \rightarrow J$ heißt chaotisch in J , wenn für f die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. f besitzt eine sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen
2. f ist topologisch transitiv
3. periodische Punkte liegen dicht¹¹ in J .

Die ersten beiden Bedingungen haben wir bereits erörtert, die dritte Forderung ist ebenfalls leicht verständlich. Setzen wir in Gleichung 1.11 $r=4$ ein, so erhalten wir die beiden Punkte $x_{1/2}^{**} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$, die im chaotischen Attraktor gleichermaßen einen stabilen 2-Zyklus bilden.

Allgemein: Auch bei $r=4$ existieren unendlich viele (instabile) periodische Punkte im Einheitsintervall.

Weiterhin wird aus der Definition ersichtlich, dass sich chaotische Systeme im mathematischen Sinn gemäß einer immer gleichen Abbildungsvorschrift verhalten (**deterministisches Chaos**), es aber dennoch unmöglich ist, Langzeitvorhersagen zu treffen.

⁷ x_1 wurde nicht zufällig gewählt. Der bei einer lokalen Extremalstelle startende dynamische Prozess heißt auch »**kritischer Orbit**«. Vgl. Sternemann, LKDD, S. 99ff

⁸ Beweis siehe Lergenmüller, Chaos im Grund- und Leistungskurs, S. 43

⁹ Neben der Devaney'schen existieren u.a. noch Definitionen nach Lee / Yorke, Diamond, etc ...

¹⁰ 1992 wies eine Gruppe australischer Studenten nach, dass Bedingung (2) zwingend aus (1) und (3) folgt, die Definition also verbesserungsfähig ist.

¹¹ Eine Menge D eines metrischen Raums M heißt dicht in der Menge $M_0 \subseteq M$, wenn zu jedem $x_0 \in M_0$ und jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ ein $x \in D$ existiert mit $|x - x_0| < \varepsilon$.

Somit zeichnen drei Eigenschaften eine chaotische Abbildung aus:

- 1. Unvorhersagbarkeit**
- 2. Unzerlegbarkeit**
- 3. Ein Element der Regelmäßigkeit**

Wie wir gesehen haben, generieren bereits einfache, quadratische Rekursionsgleichungen chaotisches Verhalten.

3.4 Ergebnisse der Chaosforschung¹²

Ausgehend von der Populationsdynamik ist heute eine ganze Klasse von Systemen bekannt, die chaotisches Verhalten aufweisen (z.B. Wetterentwicklung, Planetenbewegung, Verlauf von Börsenkursen).

Demnach ist das Phänomen »Chaos« bedeutend weiter verbreitet als bisher angenommen. Obwohl wir die Gleichungen zur Beschreibung der Systeme kennen, ist es uns dennoch unmöglich, Aussagen über ihre Zukunft zu treffen.

Schon winzigste Abweichungen in den Startbedingungen führen zum Zusammenbruch jeglicher Vorhersagbarkeit. Selbst oder gerade der Computer ist als Instrument zur Bestimmung des Langzeitverhaltens solcher Systeme ungeeignet. Seine begrenzte Stellenzahl führt zwangsläufig zu Rundungsfehlern, wodurch eine scheinbare Determiniertheit vorgetäuscht wird. In Wirklichkeit ist jedoch kein Rechner in der Lage, den Orbit über mehrere Iterationen hinweg korrekt wiederzugeben.

Die Verdopplung der Stellenzahl von einem Iterationsschritt zum nächsten lässt jeden Computer schnell an die Grenzen seiner Genauigkeit stoßen, der einsetzende Schmetterlingseffekt macht jedes weitere Ergebnis wertlos.

Ein weiterer, beunruhigender Aspekt nicht-linearer Systeme ist das plötzliche Umschwenken von regulärem in chaotisches Verhalten. Schon kleine Änderungen des Kontrollparameters können stabile Verhältnisse zunichte machen. Dies sollte nachdenklich stimmen, bedenkt man, dass der Atmosphäre, ohne tiefgreifendes Verständnis der zu Grunde liegenden Zusammenhänge, massiv CO₂ zugeführt wird.

Aufgabe der Chaosforschung bleibt somit, Modelle und Theorien zu entwickeln, die qualitative Aussagen über die künftige Entwicklung chaotischer Systeme ermöglichen, welche offensichtliche ebenfalls einem übergeordneten Prinzip zu gehorchen scheinen (vgl. Feigenbaumkonstanten). Die Anwendungsbereiche sind vielfältig, das Spektrum reicht von korrekten Wettervorhersagen über die Darstellung von Populationsentwicklungen bis hin zur Eindämmung von Seuchen.

¹²Über die Bedeutung dieses Begriffs herrscht Uneinigkeit. Exakter wäre es, von der Erforschung nicht-linearer Systeme zu sprechen.

4. Anhang

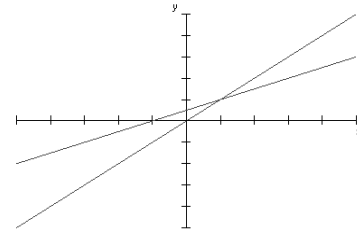
4.1 Graphische Iteration

Das Prinzip der graphischen Iteration wurde bereits in Abschnitt 1.3 beschrieben. Bekanntlich wird in der rekursiven Darstellung jedes Element der Folge als Funktion eines vorangehenden Gliedes ausgedrückt. Trägt man den Graph dieser Abbildungsvorschrift im Koordinatensystem ein, so erhält man das sog. **Phasendiagramm**.

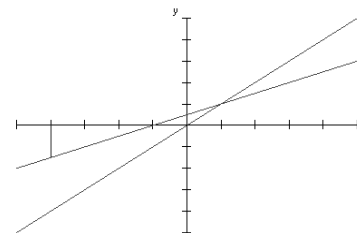
Die graphische Iteration macht sich das Phasendiagramm zu nutze, um den Orbit optisch darzustellen. Betrachten wir hierzu ein Beispiel:

Gegeben sei eine lineare Rekursionsformel mit $x_{n+1} = f(x_n) = 0.5 \cdot x_n + 5$.

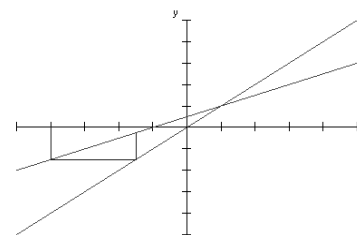
Zuerst erstellen wir das Phasendiagramm, in welches wir die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten ebenfalls eintragen.



Anschließend markieren wir einen Startwert auf der x-Achse und zeichnen von diesem Punkt aus eine Vertikale bis zur Kurve.



Von diesem Schnittpunkt aus zeichnen wir eine Horizontale bis zur Winkelhalbierenden, von dort aus wieder eine Vertikale bis zur Kurve usw.



Die in Abschnitt 1.4 gewonnenen Ergebnisse lassen sich somit auch graphisch darstellen (Auswahl konkreter Fälle):

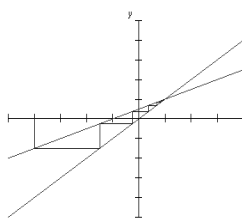


Abb. 1: $|a| < 1$

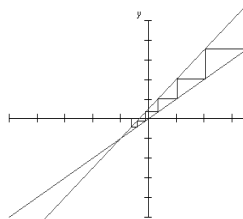


Abb. 2: $|a| > 1$

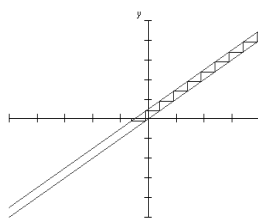


Abb. 3: $a = 1$

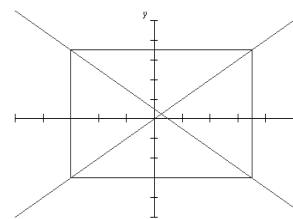


Abb. 4: $a = -1$

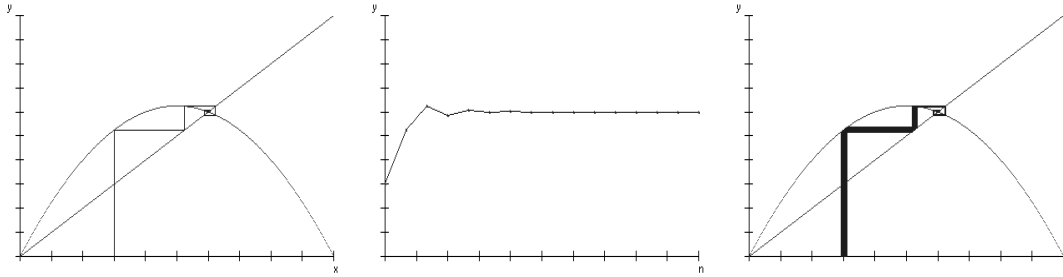
4.2 Überblick über das Verhalten der log. Gleichung

Graphische Iteration, Zeitreihendiagramm und Intervallkompression im **Ordnungsbereich** $r = 2,5; x_1 = 0,3$ (»Ein-Punkt«-Attraktor, siehe 2.3):

Abb. 1: Graphische Iteration

Abb. 2: Zeitreihe

Abb. 3: Intervallkompression



Der **2-Zyklus** stellt sich graphisch wie folgt dar, vgl. auch Abschnitt 2.4 (es wurde $r = 3,25$ gewählt, da $r = 3,05$ sehr langsam zyklisch wird):

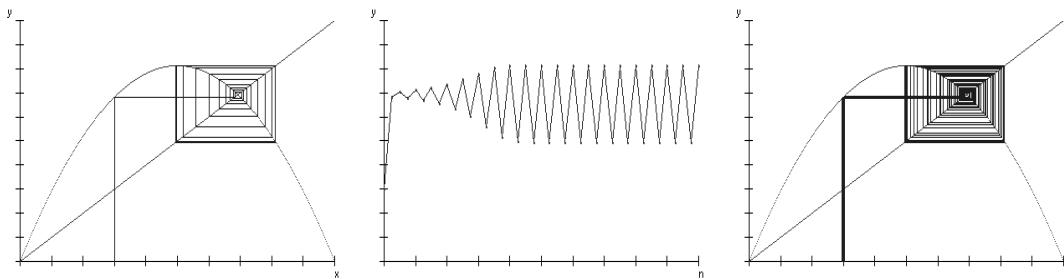


Abb. 4: Graphische Iteration

Abb. 5: Zeitreihe

Abb. 6: Intervallkompression

Im **chaotischen Attraktor** $r = 4$ (siehe S. 15ff) wechseln Intervalllexpansion bzw. -kompression einander ab, ein exemplarischer Orbit zeigt selbst nach 150 Iterationen noch keinerlei Regelmäßigkeit:

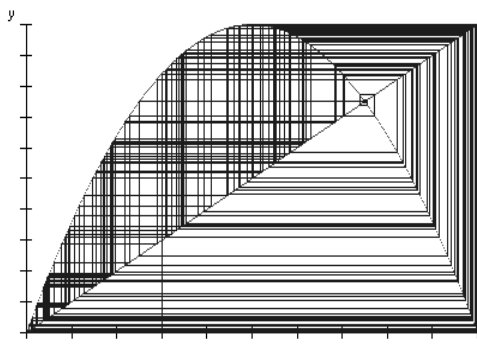


Abb. 7: Graphische Iteration

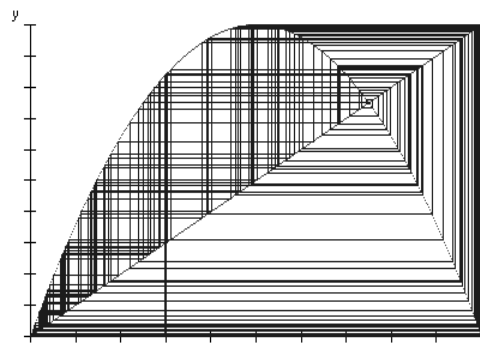


Abb. 8: Intervalllexpansion bzw. -kompression

Die Bedeutung der sensitiven Abhängigkeit (vgl. 3.3) wird besonders deutlich, betrachtet man die Zeitreihen zweier benachbarter Startwerte:

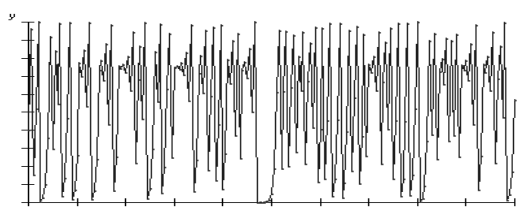


Abb. 9: Zeitreihe $x_1 = 0,400000$, 200 Iterationen

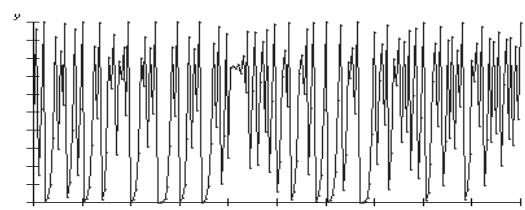


Abb. 10: Zeitreihe $x_1 = 0,400001$, 200 Iterationen

5. Literaturverzeichnis

Zur Erstellung dieser Facharbeit wurden folgende Quellen und Hilfsmittel verwendet:

- Athen, H., Rechnen und Mathematik, München, 1978
- Lergenmüller, A.: Chaos im Grund- und Leistungskurs, unveröffentlichtes Manuskript, o. O., 1995
- Loistl, O., Chaostheorie – zur Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme, München, ³1996
- Peitgen, H., Bausteine des Chaos – Fraktale, Berlin, 1992
- Reinartz, E., Logistische Wachstumsdynamik und Chaos, Materialien für eine mathematische Unterrichtseinheit zur Einführung in grundlegende, fächerübergreifende Sichtweisen im Pflichtunterricht der Jahrgangsstufe 10, Düsseldorf, 1999
- Sternemann, W., Leistungskurs Diskrete Dynamik - Materialien zu einem Unterrichtsversuch im Mathematik-Leistungskurs der Jahrgangsstufe 13 am Gymnasium Canisianum Lüdinghausen, in: Werkstattbericht 11 der Beratungsstelle für Neue Technologien, Hrsg. Landesinstitut für Schule und Weiterbildung, Soest, 1995

- <http://hypertextbook.com/chaos/>
- <http://members.aol.com/gottfelix/facharb.htm>
- <http://tqd.advanced.org/3703/>
- <http://www.apmaths.uwo.ca/~bfraser/version1/chaos.html>
- <http://www.asn-linz.ac.at/iaac/gmunden/chaostheorie.htm>
- <http://www.physics.gatech.edu/chaos/>
- <http://www.rotfl.org/~rotfl/extras/chaos/chaos1/chaos1.html>
- <http://www.springer-ny.com/nst/>

Zur Erstellung der Graphiken wurden folgende Programme verwendet:

- FIGWIN; Windows-Version 3.0 von Ulrich Schwebinghaus; 42369 Wuppertal, 1999
- Paint Shop Pro, Windows-Version 5.01, Jasc Software, 1998

6. Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Ort

Datum

Unterschrift des Schülers