

FACHARBEIT

aus dem Fach Physik

Thema: **Deterministisches Chaos**

Verfasser: Jörg Stadlinger

Leistungskurs: Physik

Inhaltsverzeichnis

1.	Einführung in die Chaostheorie	3
2.	Grundlagen des deterministischen Chaos	
2.1	Das Prinzip der Kausalität	4
2.2	Die Sensitivität eines Systems	5
3.	Beispiele und Versuche	
3.1	Die Verhulst Dynamik als mathematisches Beispiel für Periodenverdoppelungen	
3.1.1	Das Grundprinzip	6
3.1.2	Feigenbaumdiagramm	9
3.1.3	Beweis für die Existenz exakter Attraktoren	10
3.2	Periodenverdoppelung am nichtlinearen, elektrischen Schwingkreis	
3.2.1	Grundprinzip der Schaltung	15
3.2.2	Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung	16
3.2.3	Messreihe zu unterschiedlichen Induktivitäten	20
3.2.4	Kapazität der Diode	21
3.3	Periodenverdoppelung am mechanischen Drehpendel	
3.3.1	Versuchsprinzip und Versuchsaufbau	24
3.3.2	Versuchsdurchführung und Ergebnis	26
4.	Zusammenfassung	27
5.	Abschließende Bewertung	28
	Anhang	30
	Literatur	33

1. Einführung in die Chaostheorie

„Kann der Flügelschlag eines Schmetterlings
in Brasilien einen Tornado in Texas hervorrufen?“¹

Der Meteorologe und Mathematiker Edward N. Lorenz, von dem dieses Zitat stammt, legte hiermit einen der Grundsteine der Chaostheorie. Der Name Chaos in der deutschen Sprache wird unter vielen Bedeutungen gebraucht. Der Duden liefert hierfür die Erklärung „wüstes Durcheinander“ bzw. „Auflösung aller Ordnung“. Man spricht von Chaos auf dem ungeordneten Schreibtisch oder von einer chaotischen Organisation, wenn etwas nicht so klappt, wie es geplant war. Dies kommt der mathematischen bzw. physikalischen Definition des Chaos schon sehr nahe. Als Chaos bezeichnet man die Auflösung der Vorhersagbarkeit. Die Chaostheorie ist hauptsächlich eine Bewegung des 20. Jahrhunderts, die mit der Entwicklung der Computer einherging. Mit ihrer Hilfe konnten neuerdings extrem viele Gleichungen bis auf viele Stellen nach dem Komma exakt berechnet werden. Jedoch auch schon im 17., 18. und 19. Jahrhundert haben sich Wissenschaftler wie der besagte Edward N. Lorenz, James Clerk Maxwell und Pierre Simon Marquis de Laplace um das Problem des Determinismus bemüht. Es ging dabei im wesentlichen darum, ob unter gleichen bzw. ähnlichen Anfangsbedingungen eines Experiments, die Folgen ebenfalls gleich, also vorhersagbar oder unterschiedlich, d.h. unvorhersagbar, chaotisch sein können. Die Hauptfrage hierbei war immer, ob es möglich sei, wenn man alle Anfangsbedingungen des Universums kennen würde und fähig ist, diese miteinander in Verbindung zu bringen, sowohl die Zukunft als auch die Vergangenheit zu berechnen. Diesen Glauben hatte z.B. Laplace, nach dem ein Wesen, welches dieses könnte, als Laplace-scher Geist bezeichnet wird. Die Kontroverse zu diesem mechanistischen Weltbild ist die Stochastik. Hier können keinerlei Vorhersagen mehr getroffen, sondern nur Wahrscheinlichkeiten für zukünftige Ereignisse angegeben werden. Mit dem Gebiet dazwischen beschäftigt sich die Chaostheorie.

¹ Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München, Handreichung für den Physikunterricht im Gymnasium – Computereinsatz im Physikunterricht, S. 204

2. Grundlagen des deterministischen Chaos

2.1 Das Prinzip der Kausalität

Laplace beschreibt sein Wesen 1812 auf folgende Weise:

„Eine Intelligenz, welche für einen gegebenen Augenblick alle in der Natur wirkenden Kräfte sowie die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Elemente kennt und überdies umfassend genug wäre, um diese gegebenen Größen der Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegung der größten Weltkörper wie des leichtesten Atoms umschließen; nichts würde ihr ungewiss sein, und Zukunft wie Vergangenheit würden ihr offen vor Augen liegen.“²

Dieses Zitat charakterisiert die wissenschaftliche Stimmung im 19. Jahrhundert. Man glaubte, ausgehend von den Erfolgen Isaac Newtons, an die grenzenlose Berechenbarkeit der Natur und damit an das Existieren einer Weltformel, die alle Zusammenhänge beschreibt. Ein Grundprinzip dieses mechanischen Weltbilds ist die logische Voraussetzung: **Gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen**. Es wird als **die schwache Kausalität** bezeichnet. Ein Experiment, das immer mit denselben Anfangsbedingungen gestartet wird, muss nach menschlichem Selbstverständnis auch immer dasselbe Ergebnis zeigen. Dies ist jedoch meistens nur richtig, da auch **das starke Kausalitätsprinzip** bei den meisten Versuchen zutrifft. **Ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkungen**. James Clerk Maxwell meint 1879 hierzu:

„Es ist eine metaphysische Doktrin, dass gleiche Ursachen gleiche Wirkungen nach sich zögen. Niemand kann sie bestreiten. Ihr Nutzen aber ist gering in einer Welt wie dieser, in der gleiche Ursachen niemals wieder eintreten und nichts zum zweiten Mal geschieht.“³

Im 20. Jahrhundert mit dem Beginn der Quantenmechanik kamen jedoch prinzipielle Grenzen der Berechenbarkeit auf. Heisenberg beschreibt in seiner Unschärferelation mit der Formel $\Delta p_x \Delta x \geq \frac{h}{2\pi}$ die prinzipielle Ungenauigkeit bei der Orts- bzw. Impulsbestimmung eines Teilchens. Hierbei

² Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München, Handreichung für den Mathematik- und Physikunterricht im Gymnasium – Fraktale Geometrie und deterministisches Chaos, S.21

³ Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München, Handreichungen für den Physikunterricht im Gymnasium – Computereinsatz im Physikunterricht, S. 203

hat die Tatsache, dass die Bahn des Teilchens nicht beschrieben werden kann, nichts mit der Unfähigkeit der Messvorrichtung zu tun, sondern es ist theoretisch und selbst wenn alle technischen Mittel zur Verfügung ständen einfach nicht möglich. Das Deterministische Chaos zeigte ebenso Grenzen der Vorhersagbarkeit auf. Obwohl die Zukunft rein theoretisch berechenbar, also determiniert ist, ist sie von so winzigen Faktoren abhängig, so dass die Berechnung unmöglich bzw. einfach falsch wird. Dennoch haben Newtons Vorstellungen, in vielen Bereichen Anwendung gefunden. Die exakte Berechnung der Planetenbahnen, die genaue Beschreibung der Gravitation oder die Konstruktion wichtiger Maschinen zeigen dies sehr deutlich.

2.2 Die Sensitivität eines Systems

„Eine sehr kleine Ursache, die wir nicht bemerken, bewirkt einen beachtlichen Effekt, den wir nicht übersehen können, und dann sagen wir, der Effekt sei zufällig. Wenn die Naturgesetze und der Zustand des Universums zum Anfangszeitpunkt exakt bekannt wären, könnten wir den Zustand dieses Universums zu einem späteren Moment exakt bestimmen. Aber selbst wenn es kein Geheimnis in den Naturgesetzen mehr gäbe, so könnten wir die Anfangsbedingungen doch nur annähernd bestimmen. Wenn uns dies ermöglichen würde, die spätere Situation in der gleichen Näherung vorherzusagen – und dies ist alles, was wir verlangen – so würden wir sagen, dass das Phänomen vorhergesagt worden ist, und dass es Gesetzmäßigkeiten folgt. Aber es ist nicht immer so; es kann vorkommen, dass kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen schließlich große Unterschiede in den Phänomenen erzeugen. Ein kleiner Fehler zu Anfang wird später einen großen Fehler zur Folge haben. Vorhersagen werden unmöglich, und wir haben ein zufälliges Ereignis.“⁴

Diese Aussage stammt von dem Mathematiker Poincare, der sie 1899 für einen Wettbewerb veröffentlichte. Es geht darin um die Sensitivität eines Systems und damit um die Unmöglichkeit einer Vorhersage. Unter Sensitivität versteht man kurzum inwiefern kleine Änderungen bei den Anfangsbedingungen das Endergebnis beeinflussen. Je stärker dies der Fall ist, desto höher ist die Sensitivität. Das Prinzip der starken Kausalität ist nicht

⁴ Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München, Handreichung für den Mathematik- und Physikunterricht im Gymnasium – Fraktale Geometrie und deterministisches Chaos, S. 23f

mehr anwendbar. Schon bei einfachen Systemen, z.B. dem Werfen eines Würfels oder der Ziehung der Lottozahlen kann dies beobachtet werden. Theoretisch müsste beim zweimaligen genau gleichen Werfen eines Würfels auch die gleiche Augenzahl erscheinen. Es wirken jedoch Faktoren, wie die Atemluft, eine Kerbe im Tisch auf dem gewürfelt wird, winzige Unebenheiten in der Hand des Werfenden oder auch die Gravitationskraft eines Danebensitzenden, so dass niemals der Wurf unter gleichen Bedingungen wiederholt werden kann. Die gewürfelte Augenzahl ist trotz der theoretisch möglichen Vorhersagbarkeit chaotisch, d.h. zufällig. Auch die Ziehung der Lottozahlen ist theoretisch deterministisch. Das Zusammenprallen der Kugeln könnte berechnet und daraus das Ergebnis der Ziehung geschlossen werden. Es wirken jedoch so viele winzige Faktoren auf die Kugeln ein, d.h. die Sensitivität des Systems ist sehr hoch, so dass selbst die genaueste Berechnung nichts mit der Ziehung zu tun hat. Noch deutlicher wird dieses Zufallsprinzip bei komplexen Systemen wie beispielsweise dem Wetter. Viele winzige Einflüsse sind einfach nicht messbar. Der Schmetterling in Brasilien schlägt mit dem Flügel und ändert somit die Bedingungen für das System. Diese winzige Änderung am Anfang bewirkt nach einer gewissen Zeit einen beachtlichen Effekt. Die Wettervorhersage über einen längeren Zeitraum wird daher unmöglich.

3. Beispiele und Versuche

3.1. Die Verhulst Dynamik als mathematisches Beispiel für Periodenverdoppelungen

3.1.1 Das Grundprinzip

Die Populationsdynamik des Biologen P. F. Verhulst beschreibt einen typischen Weg ins Chaos. Es handelt sich hierbei um eine rein mathematische Betrachtung. Verhulst beschäftigte sich 1845 mit Populationen mit begrenztem Lebensraum. Wichtig war für ihn, warum eine Tierart, trotz ziemlich hoher Vermehrungsrate über eine längere Zeit eine ziemlich konstante Anzahl von Tieren aufweist. Um dies zu untersuchen entwickelte er

folgendes, relativ einfaches mathematisches Modell. Der Anfangswert der Tiere sei x_0 , die Werte der nächsten Generationen bzw. nächsten Jahre sind dann x_1, x_2, x_3 usw. Wenn sich die Tierart ungestört vermehren könnte, wäre der Zuwachs $\Delta x_n = a \cdot x_n$, wobei a hier die Vermehrungsrate darstellt. Wenn nun a größer 0 ist, was bedeutet, dass mehr Tiere geboren werden als sterben, ergibt sich ein exponentielles Wachstum mit der Formel: $x_n = a^n \cdot x_0$ (wegen: $x_1 = a \cdot x_0, x_2 = a \cdot x_1 = a^2 \cdot x_0$ usw.)

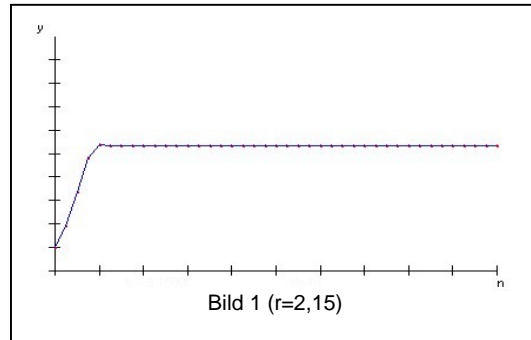
Nun kann sich jedoch eine Tierart auf begrenztem Raum nicht uneingeschränkt ausbreiten. Je größer die Anzahl der Tiere wird, desto weniger Nahrung steht pro Tier zur Verfügung. Unweigerlich sinkt somit die Vermehrungs- bzw. Fruchtbarkeitsrate a . Ein sinnvoller Ansatz für diese Abhängigkeit gibt folgende Gleichung: $a = r \cdot (1 - x_n)$. Dies bedeutet, je höher die Anzahl der Tiere x_n wird, desto kleiner die Vermehrungsrate a . Bei $x_n = 1$ (Maximalwert der Population) sinkt a auf 0. Für $x_n = 0$ nimmt a den Wert von r an. Wenn man nun diese beiden Gleichungen kombiniert, kommt man auf folgende Gleichung, welche die Anzahl der Tiere nach einer Generation in Abhängigkeit von der Anzahl der Tiere in der Generation vorher darstellt:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) = rx_n - rx_n^2$$

Das Quadrat am zweiten Glied zeigt, dass die Werte x_n nicht linear anwachsen bzw. fallen, sondern zeigen deutlich, dass die Werte jeweils nichtlinear von ihren Vorgängern abhängen. Die Berechnung erfolgt iterativ, d.h. das Ergebnis der vorhergehenden Rechnung wird in die aktuelle Rechnung eingesetzt usw. Man erhält somit immer ein Ergebnis, das direkt von seinem Vorgänger abhängt.

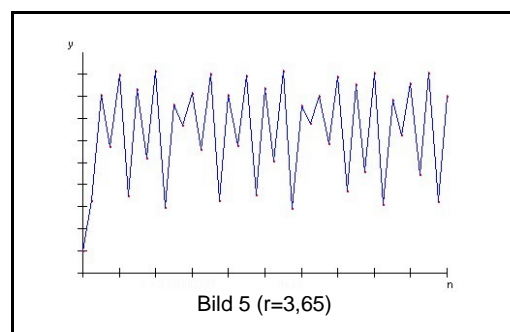
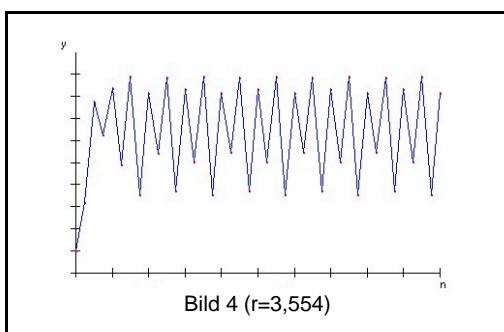
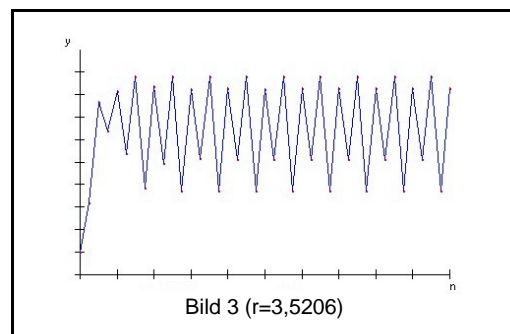
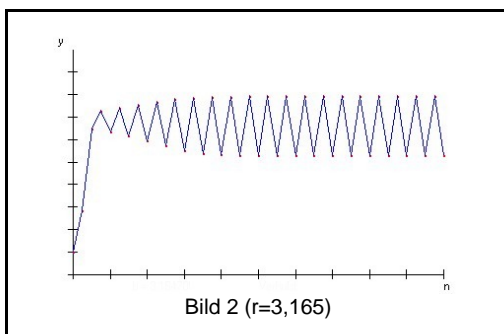
Um die Entwicklung der Population anschaulich nachvollziehen zu können, habe ich mit Hilfe des Computerprogramms „Feigenbaum“⁵ die Entwicklung von x_n berechnet und mit unterschiedlichen Werten für r in Diagrammen darstellen lassen. Hier zeigt sich nun etwas erstaunliches. Für $r < 3$ verhält sich der Kurvenlauf zunächst so, wie wir ihn erwarten.

⁵ Dieses Programm erhielt ich auf Nachfrage per eMail von Ulrich Schwebinghaus, der das Programm geschrieben hat. Über seine Internetseite www.fraktalwelt.de kam ich mit ihm in Kontakt.



Die Anzahl der Tiere pendelt sich nach einer gewissen Zeit auf einen festen Wert ein (Bild 1).

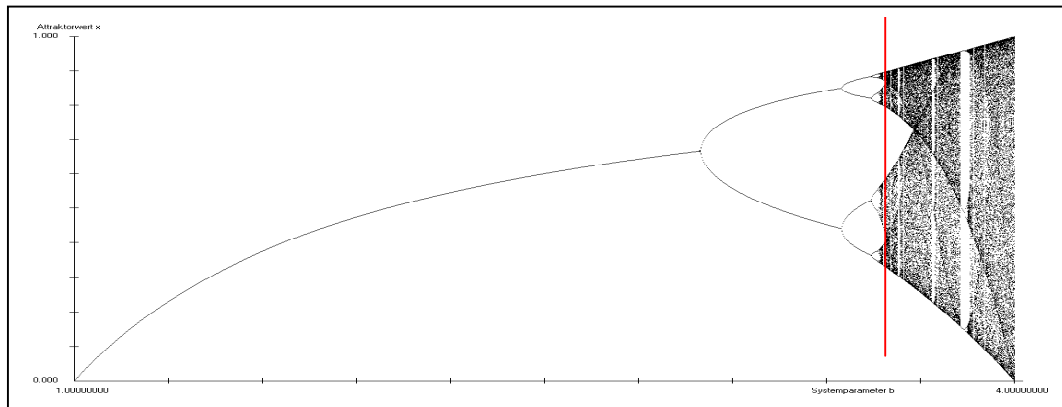
Überschreitet man nun allerdings den Wert $r = 3$, so kann man überraschenderweise feststellen, dass x_n zwischen zwei Attraktorwerten hin und her springt (Bild 2). Erhöht man nun r weiter und kommt über den Wert $r = 3,449$, so kann man wieder eine Periodenverdoppelung feststellen. x_n pendelt nun zwischen vier (Bild 3) und ab $r = 3,544$ sogar zwischen acht Attraktorwerten (Bild 4). Legt man r schließlich größer als 3,570 fest, so ist weder eine Periode noch ein fester Wert zu erkennen (Bild 5). Man könnte auch sagen, die Periode ist unendlich geworden. Die Schwingung ist nun chaotisch.



3.1.2 Das Feigenbaumdiagramm

Die eben erwähnte Periodenverdoppelung kann man in einem Feigenbaumdiagramm, das zum ersten Mal von dem amerikanischen Mathematiker M.J. Feigenbaum beobachtet und erklärt worden ist, sehr gut darstellen. Hierbei werden in Abhängigkeit des Parameters r die jeweiligen Grenzwerte oder Attraktoren aufgetragen.

Feigenbaumdiagramm⁶



Man sieht hier sehr gut, dass zunächst bei der Erhöhung des Parameters der Zahlenwert immer einem Attraktor entgegenstrebt. Bei jeder Gabelung kommt es zu einer Periodenverdoppelung und damit zu zwei Grenzwerten. Bei der nächsten Gabelung gibt es dann vier Grenzwerte usw. Ab der roten Markierung ist keine Ordnung mehr erkennbar. Ab hier spricht man von Chaos. Das Feigenbaumdiagramm hält auch einige Besonderheiten bereit, die M. J. Feigenbaum als erster beobachtet und erklärt hat. Er untersuchte die Abstände zwischen den Parameterwerten r_i , bei denen Bifurkationen auftreten. Ihm fiel auf, dass die Bifurkationspunkte auf eine konstante Weise immer näher zusammenrücken. Bei der Berechnung ergab sich, dass der Quotient $f = \frac{\Delta r_{i-1}}{\Delta r_i}$, wobei $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$, bei immer größer werdendem i auf eine bestimmte Zahl zustrebt. Diese Naturkonstante, die als Feigenbaum-Zahl f bekannt ist, hat den Wert

$$f = 4,6692016091029\dots$$

Beim Feigenbaumdiagramm ist außerdem bemerkenswert, dass sich nach einer gewissen Zeit scheinbar wieder Ordnung einstellt. Bei

⁶ Erstellt mit dem Computerprogramm „Feigenbaum“ (siehe Fußnote 5)

$3,82 < r < 3,86$ kommt es beispielsweise zu einer Art Fenster im Chaos. Dieser Bereich wird im Diagramm als relativ weiße Fläche deutlich. Hier gibt es nur noch drei feste Attraktorwerte, woraus sich durch Periodenverdoppelung wie am Anfang wieder Chaos entwickelt.

Bei einem Feigenbaumdiagramm sind die Grenzwerte bzw. Attraktoren entscheidend. Da deren Existenz charakteristisch für das deterministische Chaos ist, will ich nun kurz beschreiben, wie man beweisen kann, dass es wirklich exakte Werte sind und wie man diese ausrechnen kann⁷.

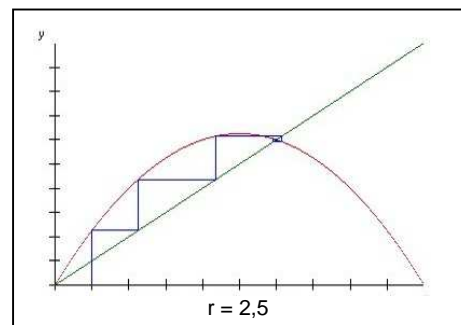
3.1.3 Beweis für die Existenz exakter Attraktoren⁸

Wie vorhin schon erwähnt, liegt der Populationsdynamik die Funktion $f(x) = rx(1-x)$ zu Grunde, die iterativ berechnet wird. Um die Grenzwerte auszurechnen, betrachtet man jedoch zunächst die ganz normale Funktion. Eine kleine Kurvendiskussion ergibt folgendes:

$$f(x) = rx(1-x) \quad \rightarrow \text{Nullstellen:} \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

$$f'(x) = r - 2rx = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{Scheitel} \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}r \right)$$

Die Funktion ist also eine nach unten geöffnete Parabel. Die grüne Linie ist die Winkelhalbierende des ersten Quadranten. Nur für diese Punkte gilt die Bedingung $f(x) = x$. Die blaue Linie kennzeichnet eine Iterationsfolge mit einem bestimmten Anfangswert x_0 . Sie startet auf der x-



Achse und geht senkrecht nach oben. Der Schnittpunkt mit dem Funktionsgraphen kennzeichnet nun den Wert x_1 . Durch eine waagrechte Linie bis zur Winkelhalbierenden wird dieser Funktionswert nun wieder zum Ausgangswert für die nächste Iteration (Winkelhalbierende $f(x) = x$). Nun startet wieder eine senkrechte Linie nach oben, wodurch sich beim Schnitt

⁷ nach Wolferseder, Bentele und Theofel

⁸ Die Grafiken wurden mit dem Computerprogramm „Feigenbaum“ erstellt (siehe Fußnote ⁵)

mit dem Graphen der Wert x_2 ergibt. Dieses Verfahren wird nun sehr oft wiederholt und man erkennt gut den Attraktor, auf welchen $x_{n \rightarrow \infty}$ zustrebt. Bei Fixpunkten muss gelten $f(x) = x$ (Begründung: Bei der iterativen Berechnung muss, wenn es sich um einen Attraktor handelt und dieser wieder in die Formel eingesetzt wird, wieder derselbe Wert herauskommen. Ansonsten handelt es sich um keinen Attraktor).

$$x = rx(1-x) \quad | : x \quad \text{für } x \neq 0 \quad (x = 0 \text{ ist die erste Lösung})$$

$$x = r(1-x) \Rightarrow x = \frac{r-1}{r} \quad (\text{ist die 2. Lösung})$$

Es ergeben sich hier also für die x-Werte der zwei Fixpunkte: $F_1 = 0$ und

$$F_2 = \frac{r-1}{r}$$

Die Ableitungen bei den Fixpunkten betragen:

$$f'(F_1) = r \quad \text{und} \quad f'(F_2) = r - 2r \frac{r-1}{r} = r - 2r + 2 = 2 - r$$

Fixpunkte können allgemein in drei Arten unterteilt werden:

1. $|f'(F_n)| > 1 \rightarrow$ der Fixpunkt ist abstoßend, es handelt sich um einen Repellor (Begründung: Der Betrag der Steigung der Funktion ist an der Stelle F_n größer als die der Winkelhalbierenden. Bei der Iteration bewegt sich somit die blaue Linie vom Fixpunkt weg)
2. $|f'(F_n)| < 1 \rightarrow$ der Fixpunkt ist anziehend, es handelt sich um einen Attraktor (Begründung: Der Betrag der Steigung der Funktion ist an der Stelle F_n kleiner als die der Winkelhalbierenden. Bei der Iteration bewegt sich somit die blaue Linie zum Fixpunkt hin)
3. $|f'(F_n)| = 1 \rightarrow$ der Fixpunkt ist indifferent, hängt also vom Startwert x_0 ab

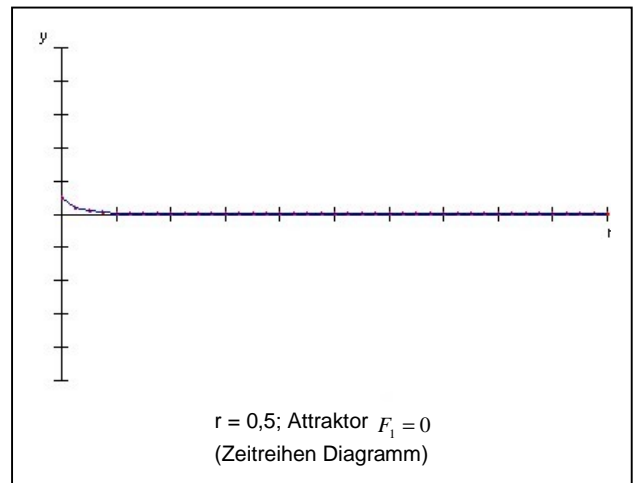
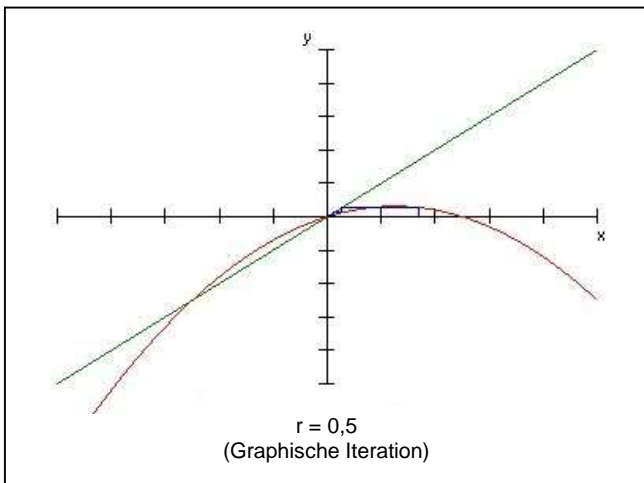
Daraus ergeben sich nun mehrere Fälle:

1. Fall $0 < r < 1$

$F_1 = 0$ wirkt als Attraktor, da $|f'(F_1)| < 1$.

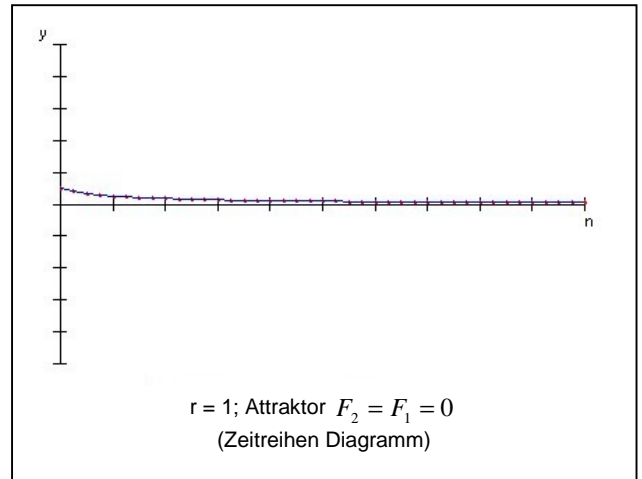
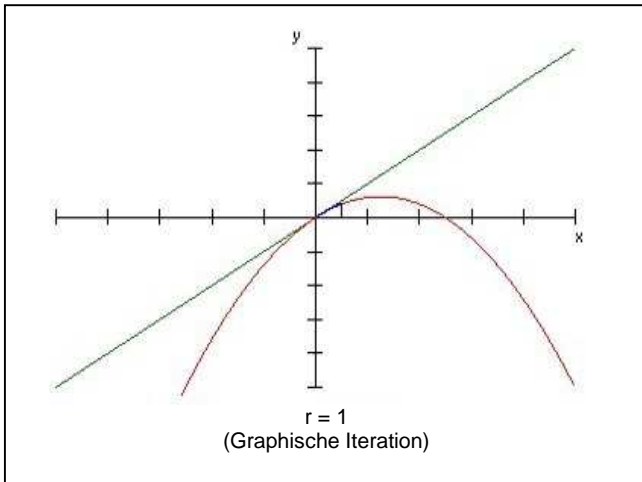
F_2 wirkt in diesem Fall als Repellor, da $|f'(F_2)| > 1$.

Um die Fixpunkte exakt zu untersuchen, müsste man nun auch noch den Einzugsbereich für die Attraktoren festlegen. Da die Startwerte für x bei der Verhulst Dynamik jedoch sowieso nur zwischen 0 und 1 liegen und somit nicht über den Repellor hinaus reichen, spielt der Einzugsbereich des Attraktors hier keine Rolle.



2. Fall $r = 1$

Hier existiert nur ein Fixpunkt, da $F_2 = \frac{r-1}{r}$ sowieso mit F_1 und das heißt mit dem Ursprung zusammenfällt.



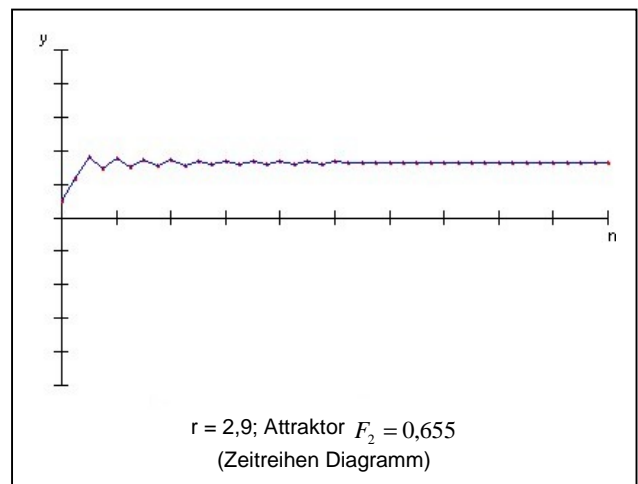
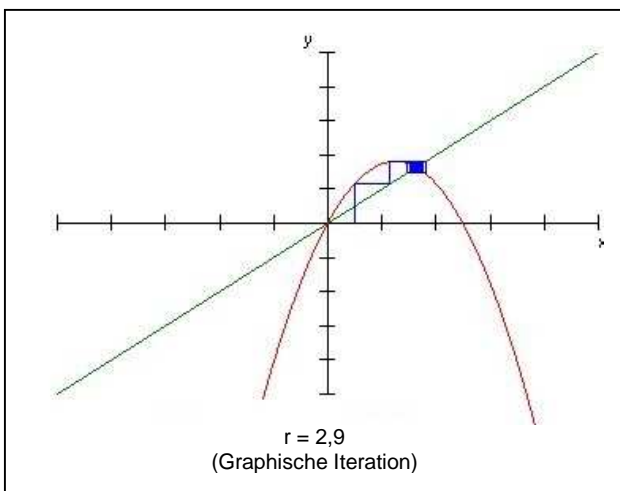
3. Fall $1 < r < 3$

In diesem Intervall existieren genau zwei Fixpunkte F_1 und F_2 , wobei F_1 der Ursprung ist.

F_1 bildet wegen $|f'(F_1)| = r > 1$ einen Repellor

F_2 bildet wegen $|f'(F_2)| = |2 - r| < 1$ einen Attraktor

Fixpunkte höherer Periode gibt es in diesem Bereich nicht!



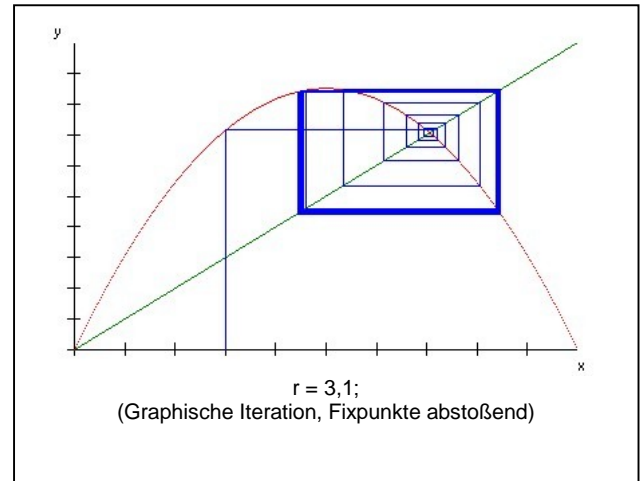
4. Fall $r = 3$

In diesem Fall gilt $|f'(F_2)| = 1$. Es handelt sich hierbei also um einen indifferenten Attraktor. Die entstehenden Grenzwerte hängen hier von dem Startwert x_0 der Iteration ab. Hieraus entsteht die 1. Bifurkation im Feigenbaumdiagramm. Es gibt nicht mehr nur einen Attraktor, der Graph verzweigt sich.

5. Fall $r > 3^9$

Sowohl F_1 als auch F_2 erweisen sich als abstoßend (Repelloren), da

$$|f'(F_1)| > 1 \text{ und } |f'(F_2)| > 1$$



Es muss also die zweite Periode untersucht werden. Dies geschieht mit folgendem Ansatz:

$$f^2(x) = f(f(x)) = x$$

$$f^2(x) = r^2 x(1-x) \cdot (1-rx(1-x)) = (r^2 x - r^2 x^2)(1-rx+rx^2) = r^2 x - r^3 x^2 - r^2 x^2 + 2r^3 x^3 - r^3 x^4$$

Aus dieser Bedingung ergeben sich nach einiger Umformung die beiden

$$\text{neuen Fixpunkte: } F_3 / F_4 = \frac{(r+1) \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r}$$

Nun berechnet man die Ableitung:

$$f^2(x) = r^2 - 2r^3 x - 2r^2 x + 6r^3 x^2 - 4r^3 x^3 = r^2(-4r^2 x^3 + 6rx^2 - 2x - 2rx + 1)$$

Durch Polynomdivision ergeben sich folgende Faktoren:

$$f^2(x) = r^2(1-2x)(1-2rx+2rx^2)$$

Setzt man nun die beiden neuen Fixpunkte in die Ableitung ein, so stellt man fest, dass für beide Fixpunkte gilt:

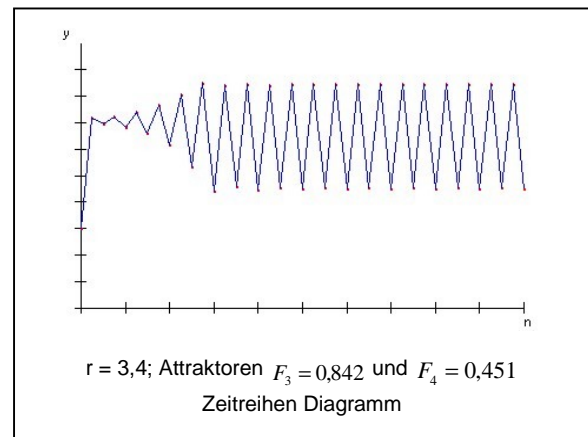
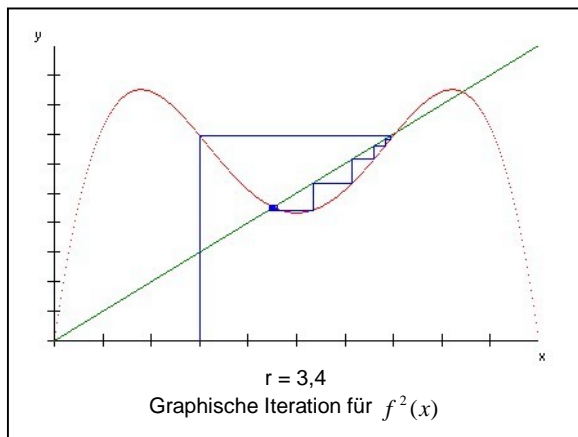
$$|f^2(F_3 / F_4)| < 1 \quad (\text{für den Bereich } 3 < x < 1 + \sqrt{6})$$

⁹ Die genaue Berechnung würde den Rahmen meiner Facharbeit übersteigen. Hier soll nur gezeigt werden, dass die Werte wirklich exakt sind und wie sie prinzipiell berechnet werden können

Damit handelt es beide Male um Attraktoren. Es gibt also im Bereich

$3 < x < 1 + \sqrt{6}$ genau vier Fixpunkte mit den x-Werten $F_1=0$, $F_2 = \frac{r-1}{r}$ und

$F_3 / F_4 = \frac{(r+1) \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r}$, wobei F_1, F_2 abstoßend und F_3, F_4 anziehend sind. Bei den weiteren Verdoppelungen wird dasselbe Verfahren angewendet, wodurch sich entsprechend 4, 8, 16 und mehr Attraktoren herausbilden.



Die Verhulst Dynamik als mathematisches Beispiel zeigt ganz gut, wie ein System ins Chaos abgleiten kann. Oft gehen auch bei physikalischen Versuchen, die man leicht beeinflusst Periodenverdoppelungen voraus, wonach die Schwingung nach einigen Verdoppelungen schließlich chaotisch wird. Ein physikalisches Beispiel hierfür ist der nichtlineare elektrische Schwingkreis.

3.2 Periodenverdoppelung am nichtlinearen, elektrischen Schwingkreis¹⁰

3.2.1 Grundprinzip der Schaltung

Der nichtlineare elektrische Schwingkreis besteht aus einer Spule, Halbleiterdiode und einem Widerstand, die in Reihe geschaltet sind. Über einen Sinusgenerator wird nun eine Schwingung erzwungen. Prinzipiell funktioniert dieser Aufbau wie ein normaler Schwingkreis aus Kondensator

¹⁰ Versuchsaufbau nach Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München, Handreichungen für den Physikunterricht – Computereinsatz im Physikunterricht

und Spule, wobei der Kondensator durch eine Diode ausgetauscht wird. Für kleine Spannungen funktioniert diese Diode näherungsweise so wie ein Kondensator. Liegt Spannung in Sperrrichtung an, so stehen sich positive und negative Ladungen wie beim Kondensator gegenüber. Die Sperrschicht der Diode übernimmt hier die Funktion des Dielektrikums. Liegt nun Spannung in Durchlassrichtung der Diode an, so gleichen sich die Ladungen aus, die Diode wird „neutralisiert“. Sie speichert sozusagen Ladungen. Für kleine Spannungen ist der Widerstand der Diode jedoch noch so hoch, dass auch hier kein merklicher Strom fließt. Der Unterschied zum Kondensator besteht nur darin, dass die Ladungen nicht räumlich getrennt, sondern neutralisiert in der Diode gespeichert sind.

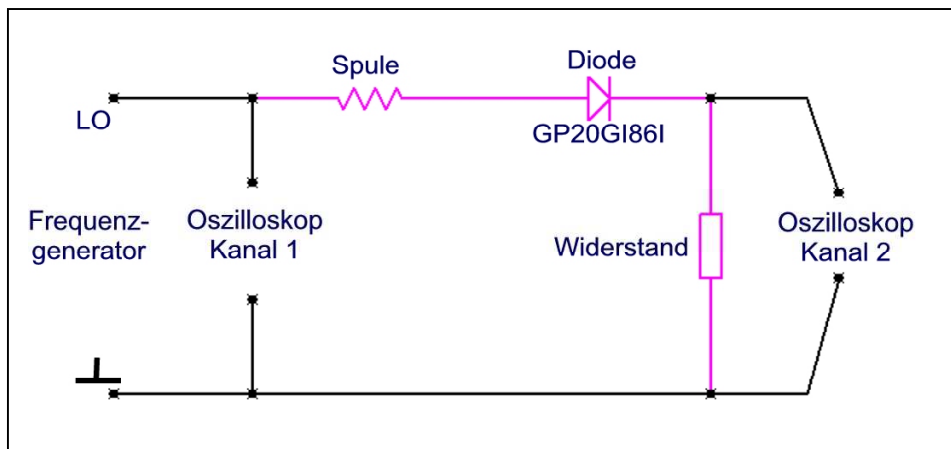
Das Wesentliche hierbei ist, dass die Ladung Q , die von der Diode gespeichert wird, nicht proportional zur Spannung U ist. Hieraus ergibt sich kein harmonisches Schwingungsverhalten mehr, welches die Voraussetzung für ein Abgleiten ins Chaos darstellt.

3.2.2 Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

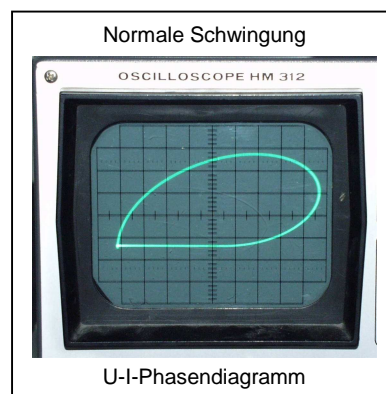
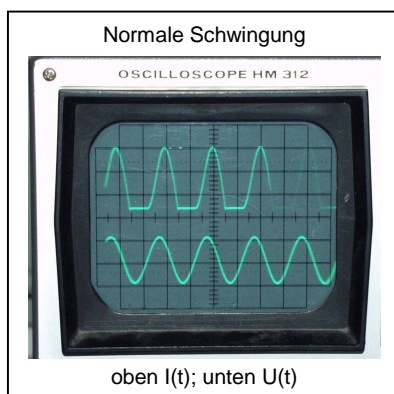
Ich untersuchte zunächst unterschiedliche Dioden der Physiksammlung auf ihr Verhalten bei meiner Schaltung. Besonders schön konnte man die Periodenverdoppelungen bei der Diode mit der Bezeichnung GP20GI86I erkennen. Deshalb wählte ich diese für meine Versuche.

Mit dem Oszilloskop maß ich am 1. Kanal die Spannung U des Frequenzgenerators und am 2. Kanal parallel dazu über einem Widerstand die Stromstärke I . Beim Aufbau der Schaltung ist besonders auf die Erdung zu achten. Sowohl der Frequenzgenerator, als auch das Oszilloskop hat eine eingebaute Erdung, welche nicht gegeneinander geschaltet werden darf, da die Spannung zwischen zwei Erdungen auf jeden Fall immer Null beträgt und somit keine Messergebnisse möglich sind.

Mein Versuchsaufbau sah folgendermaßen aus:

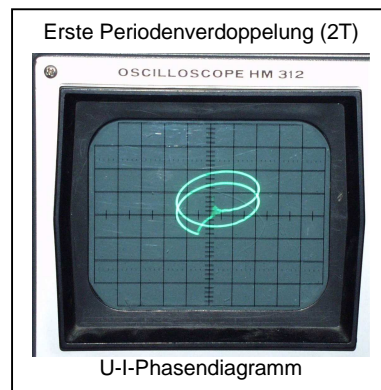
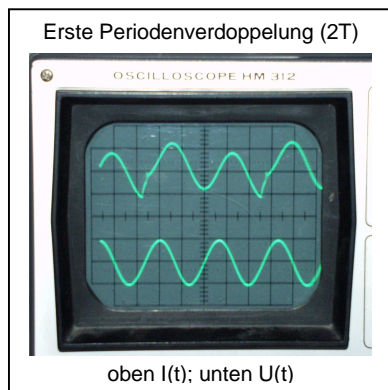


Als erstes verwendete ich nun einen Widerstand von $10\ \Omega$ und eine Spule mit der Induktivität $2\ \text{mH}$. Ich begann mit einer Frequenz am Sinusgenerator von $1000\ \text{Hz}$ und erhöhte diese langsam. Zunächst handelt es sich um eine Schwingung, die man vom normalen Schwingkreis her kennt. Schaltet man die Zeitablenkung am Oszilloskop aus, so ergibt sich in einem U-I Diagramm eine mehr oder weniger schöne Ellipse. Bei mir entstand immer ein kleiner Zacken an der Stelle, wo sich die Periode vollendet hat und die Ellipse sich schließt. Dieser stammt wahrscheinlich vom nicht Übereinstimmen der Eigenfrequenz des Schwingkreises mit den $1000\ \text{Hz}$ des Sinusgenerators. Bei jeder Wiederholung der Schwingung kommt es somit zu einer kurzfristigen Synchronisationszeit, welche sich in jenem beschriebenen Zacken äußert.



Bei einer Frequenz von ca. $30530\ \text{Hz}$ trat eine erste Periodenverdoppelung des Stroms I auf. Dies bedeutet, dass erst nach der Zeit $2T$

das System wieder seinen ursprünglichen Zustand einnimmt. Diese Periodenverdoppelung kennzeichnet, wie auch schon bei der Verhulst Dynamik gezeigt, einen Weg ins Chaos. Erkennbar ist diese Verdoppelung besonders schön im Phasendiagramm. Die Ellipse schließt sich erst nach der zweiten Schwingung, es kommt zu dem hier sichtbaren spiralförmigen Bild.

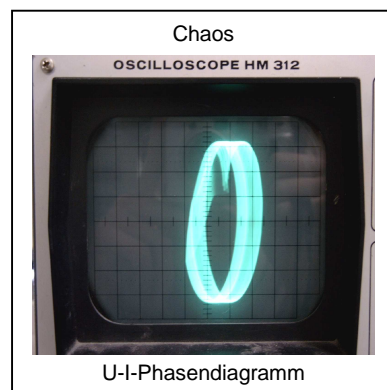
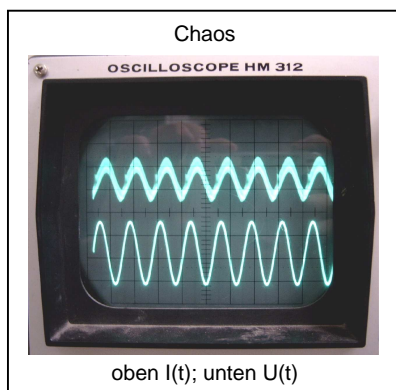
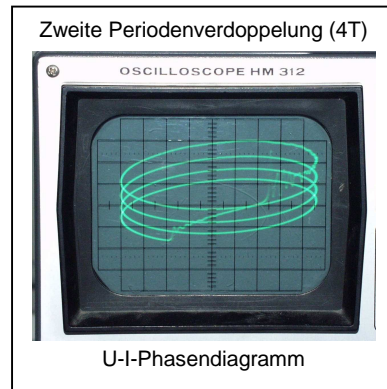
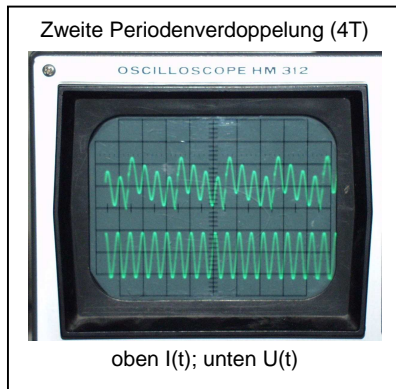


Erklärbar ist die Periodenverdoppelung folgendermaßen:

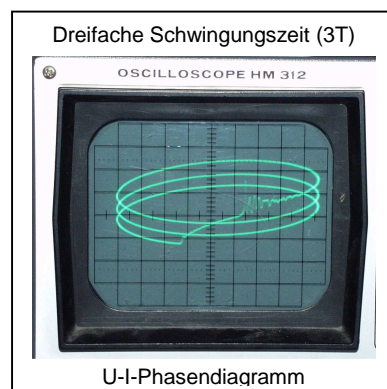
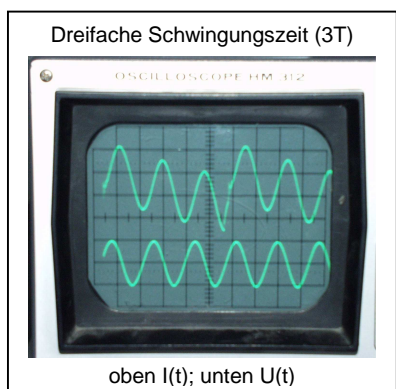
Bei niedrigen Frequenzen ist das Schwingungsverhalten mit Diode gleich dem eines normalen Schwingkreises. Wenn die Erregerspannung weniger wird, fließt die Ladung aus der Diode ab. Erst wenn diese Ladung abgeflossen ist, sperrt die Diode. Nun polt die Erregerspannung um und es wird erneut Ladung in der Diode gespeichert.

Ab einer gewissen Frequenz der Erregerspannung reicht allerdings die Zeit zum Abfließen der Ladung aus der Diode nicht mehr aus. Die Diode sperrt deswegen erst sehr spät, die Erregerfrequenz hat bereits umgepolt. Dies führt dazu, dass nun sehr wenig Ladung gespeichert werden kann. Wenig Ladung hat dann wieder ein sehr frühes Sperren der Diode zur Folge, so dass wie am Anfang wieder viel Ladung gespeichert werden kann. Erst nach zwei Schwingungen der Erregerfrequenz ergeben sich somit wieder dieselben elektrischen Größen. Die Periode hat sich verdoppelt.

Bei ca. 56340 Hz trat bei meinem Versuch die nächste Periodenverdoppelung auf, welche sich wie die erste Verdoppelung erklären lässt. Bei höheren Frequenzen war dann keine Periode mehr erkennbar. Vorhersagen werden hier unmöglich, das Chaos tritt ein.



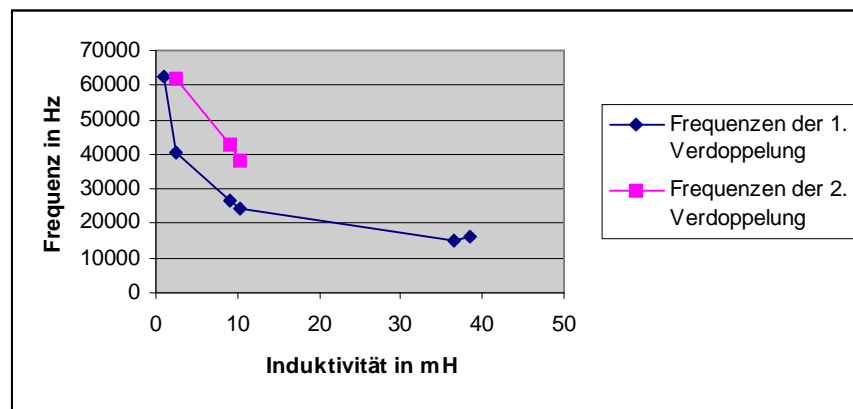
Das Chaos existiert jedoch nicht durchgehend. Bei einer weiteren Erhöhung der Frequenz stellt sich nach bereits chaotischer Schwingung auf einmal wieder Ordnung ein. Ich erhielt bei einer Frequenz von 97635 Hz nun wieder eine Periode mit dreifacher Schwingungszeit. Es herrscht wieder Ordnung und Berechenbarkeit. Mit einer weiteren Erhöhung der Frequenz kommt es danach wieder zu chaotischen Schwingungen. Dies zeigt eindrucksvoll die Ähnlichkeit zur Populationsdynamik von Verhulst. Die im Feigenbaumdiagramm ersichtlichen „Fenster im Chaos“ können also auch am nichtlinearen elektrischen Schwingkreis nachgewiesen werden.



3.2.3 Messreihe zu unterschiedlichen Induktivitäten

Ich untersuchte nun das Verhalten der Verdoppelungen bei unterschiedlichen Induktivitäten. Die von mir bestimmten Frequenzen können allerdings von Diode zu Diode variieren. Selbst bei Dioden gleicher Bauart, so wie ich sie hatte, schwanken die Ergebnisse. Diese Schwankungen lassen sich durch winzige Unterschiede bei der Herstellung erklären, die die Ergebnisse stark beeinflussen.

Die folgende Abbildung zeigt nun die Frequenz der ersten und zweiten Verdoppelung in Abhängigkeit der Induktivität.



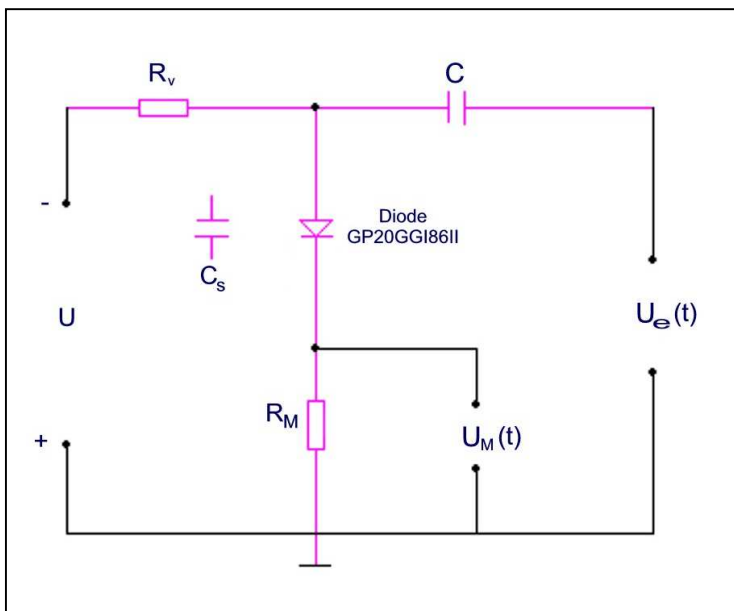
l/mH	0,9	2,4	9	10,4	36,5	38,4	120	239	4620
1. Verdoppelung /Hz	62296	40234	26750	24152	15020	16241	x	x	x
2. Verdoppelung /Hz	x	61825	42900	37963	x	x	x	x	x

Da die Frequenzen der Verdoppelungen wie oben bereits schon erwähnt, sich schon durch geringe Einflüsse ändern, will ich keine strenge Gesetzmäßigkeit festlegen. Es ist jedoch klar aus dem Diagramm ersichtlich, dass je höher die Induktivität der Spule ist, desto niedriger ist die Frequenz der ersten und zweiten Verdoppelung. Außerdem sind mit steigender Induktivität die Verdoppelungen immer schwerer zu beobachten. Für $l > 38,4$ mH konnte ich keine Verdoppelungen mehr feststellen.

3.2.4. Kapazität der Diode

Nun versuchte ich noch zu klären, warum gerade bei der von mir verwendeten Diode so gute Ergebnisse zu verzeichnen waren. Einen Ansatz lieferte das Buch „Handreichung für den Physikunterricht im Gymnasium“¹¹, aus dem ich auch den bisher beschriebenen Versuch übernommen habe. Hier ging es darum, geeignete Dioden mit hoher Kapazität anhand von langen Speicherzeiten herauszufinden, Mit Speicherzeit ist hier die Zeit gemeint, in der ein konstanter Strom in Sperrrichtung fließt, bis die Diode „geladen“ ist. Die Zeit, in der der Strom danach absinkt, wird als Sperrverzögerung bezeichnet. Leider war es mir in der vorgegebenen Schaltung trotz genauester Einstellungen, die am Speicheroszilloskop vorgenommen werden können, nicht möglich diese Speicherzeiten zu messen. Es ergab sich kein konstanter Strom sondern nur das stetige Absinken, also die Sperrverzögerung.

Daraufhin versuchte ich die Kapazität anders zu bestimmen. Das Buch „Physikalisches Praktikum“¹² lieferte hierfür folgende Schaltung:



Feste Versuchsdaten:

$C = 1\mu\text{F}$
 $R_V = 1\text{k}\Omega$
 $F = 10\text{kHz}$

Hierbei wird die Diode durch die Spannung U vorgespannt. Der Widerstand R_V sorgt dafür, dass kein merklicher Strom von der

¹¹ Versuchsaufbau nach Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München, Handreichungen für den Physikunterricht – Computereinsatz im Physikunterricht

¹² Geschke, Dieter S.201f

Wechselstromquelle U_e über U fließt, der Kondensator C tut dies in der Gegenrichtung. Nun gilt folgendes Verhältnis:

$$\left| \frac{U_M}{U_e} \right| = \left| \frac{R_M}{R_M + \frac{1}{j\omega C_s}} \right|$$

Wenn nun gilt $R_M \ll \frac{1}{\omega C_s}$ kann man die Gleichung weiter vereinfachen:

$$\left| \frac{U_M}{U_e} \right| = \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega R_M C_s}} \right| \approx \left| \frac{1}{j\omega R_M C_s} \right| = |j\omega R_M C_s| = R_M \omega C_s$$

Umgeformt ergibt sich somit für die Sperrkapazität

$$C_s = \frac{U_{M0}}{\omega R_M U_{e0}}$$

Ich ging nun daran, U_{M0} und U_{e0} für verschiedene Werte von U zu messen. Für die Messung verwendete ich das auch schon weiter oben erwähnte Speicheroszilloskop. Nun ergaben sich wiederum einige Messprobleme. Da die Spannungen sehr gering waren, machte sich das geringe Störgeräusch erheblich bemerkbar. Um dennoch messbare Ergebnisse zu erhalten, ließ ich mit der Einstellung „Average=512“ (Hierbei ermittelt das Oszilloskop aus 512 Schwingungen den Mittelwert) am Oszilloskop dieses Rauschen zum größten Teil herausfiltern. Trotzdem erreichte ich noch keine messbaren Werte. Statt dem angegebenen Wert für die Wechselspannung $U_e = 0,02V$ musste ich bei gegebenen $R_M = 200\Omega$

$U_e = 1,5V$ einsetzen. Bei einer zusätzlichen Erhöhung von R_M auf $1k\Omega$ konnte ich Messungen bereits bei $U_e = 0,8V$ durchführen.

Dementsprechend ergaben sich zwei Messreihen mit folgenden Ergebnissen:

1. Messreihe

Mit $R_M = 200\Omega$ und $U \approx 1,5V$

U / V	-5	-6	-7	-8	-9
U_e / mV	400	340	300	300	360
U_M / mV	3	1,5	1,5	2,3	1,8
$C_s = \frac{U_M}{U_e R_M \omega} / 10^{-10} F$	5,968	3,511	3,979	6,101	3,979

2. Messreihe

Mit $R_M = 1k\Omega$ und $U \approx 0,8V$

U / V	-5	-6	-7	-8	-9
U_e / mV	668	670	680	680	670
U_M / mV	6,5	6,3	6,5	6,8	7,1
$C_s = \frac{U_M}{U_e R_M \omega} / 10^{-10} F$	7,743	7,483	7,607	7,958	8,433

Als Mittelwert ergibt sich aus diesen beiden Messreihen $C_s \approx 6,276 \cdot 10^{-10} F$ bzw. $C_s \approx 630 pF$.

Dieser Wert erscheint für eine Diode relativ hoch, liegt aber in der Größenordnung von anderen Dioden (Vergleichsdiode P600, $C = 150 pF$, siehe Anhang 3)¹³. Die hohe Kapazität der Diode erklärt zudem deren Auswahl am Anfang. Aufgrund dieser Kapazität waren die Verdoppelungen besonders gut zu beobachten.

Die am nichtlinearen elektrischen Schwingkreis beobachteten Periodenverdoppelungen versuchte ich nun auch am mechanischen Drehpendel nachzustellen.

¹³ Datenblatt von Philips Semiconductors, Quelle: www.conrad.de → Produktinformation

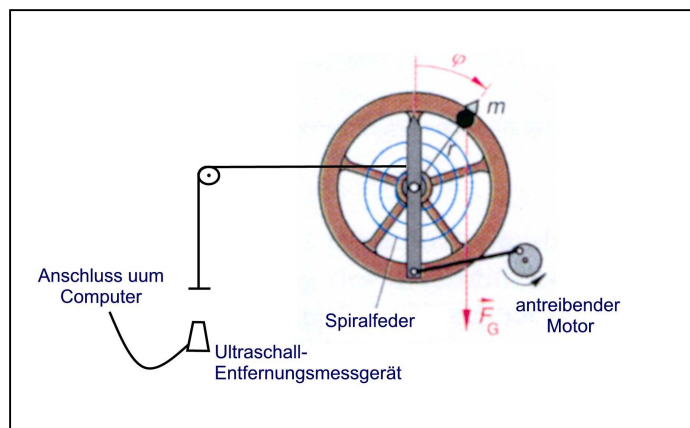
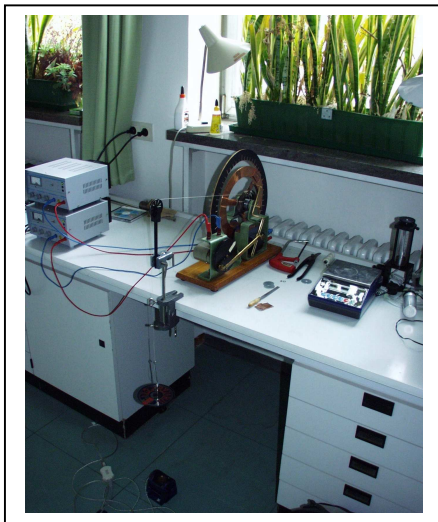
3.3 Periodenverdoppelungen am mechanischen Drehpendel¹⁴

3.3.1 Versuchsprinzip und Versuchsaufbau

Ich untersuchte die schon beim elektrischen Schwingkreis aufgetretenen Bifurkationen nun auch am mechanischen Drehpendel. Das Drehpendel erfüllt alle Voraussetzungen eines schwingungsfähigen Systems:

- Es führt eine einfache harmonische Schwingung um die Gleichgewichtslage aus
- Mit der Wirbelstrombremse erhält man eine gedämpfte Schwingung
- Regt man das System von außen durch ein externes Drehmoment an, so vollführt es erzwungene Schwingungen mit der zum Erreger identischen Frequenz

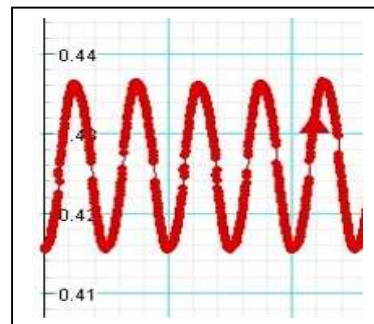
Mein Versuch sah folgendermaßen aus:



Das von mir benutzte mechanische Drehpendel besteht aus einem schwingenden Kupferring, der mit einer Spiralfeder verbunden ist. Über diese Spiralfeder treibt ein zugehöriger kleiner Elektromotor den Kupferring an und erzwingt somit eine Schwingung. Die Geschwindigkeit des Elektromotors ist über die Höhe der Versorgerspannung zu regeln. Zusätzlich ist das Drehpendel mit einer magnetischen Dämpfung ausgestattet, welche ebenfalls über eine Spannungsquelle regelbar ist. Das Pendel hat bei einer harmonischen Schwingung eine gewisse Auslenkung, die

¹⁴ Versuchsaufbau nach Grehn, Joachim S 332 f.

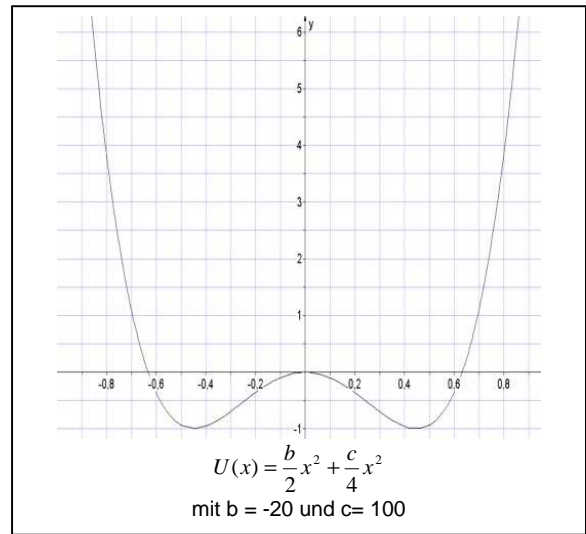
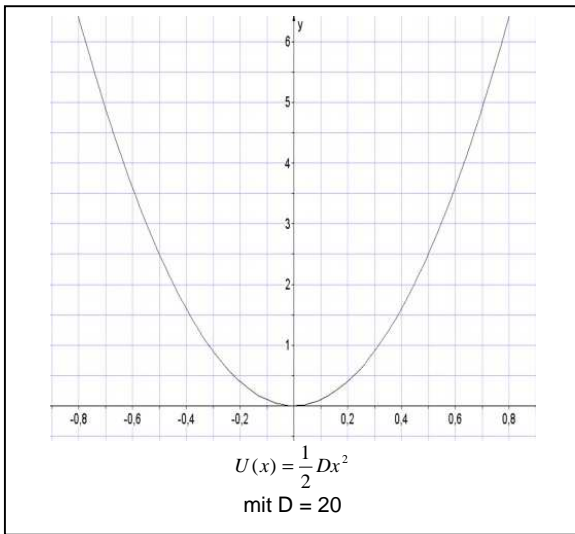
über den Winkel messbar ist. Zunächst musste ich diesen Winkel jedoch erst einmal messbar machen. Hierzu zerlegte ich das Pendel und montierte auf den Speichen des Kupferrings ein Plastikrad mit feinen Rillen. An dieses befestigte ich nun eine Schnur und wickelte diese einmal um das Plastikrad, damit das Drehpendel wie gewohnt in beide Richtungen schwingen kann. Über eine Umlenkrolle und ein kleines Gewicht, das ich an der Schnur befestigte wandelte ich somit die Pendelbewegung des Drehpendels in eine lineare Auf- und Abwärtsbewegung um. Diese Bewegung ist direkt proportional zum Auslenkwinkel ρ des Drehpendels. Nun verwendete ich ein Ultraschall Abstandmessgerät, das mit dem Computer verbunden werden kann und somit Abstände und auch Abstandsänderungen gut dargestellt werden können. Damit das sehr kleine Gewicht an der Schnur nicht immer direkt über dem Messgerät liegen muss und auch leicht schwanken darf, legte ich darauf noch eine CD, die nur dazu diente die Oberfläche zu vergrößern. Nun konnte ich die normale harmonische Schwingung des Drehpendels am Computer sichtbar machen (siehe Bild).



Daraufhin musste ich die Schwingung des Drehpendels beeinflussen, so dass sich keine ideale Schwingung mehr ergibt und ich beobachten kann, wie die Schwingung langsam chaotisch wird. Hierzu befestigte ich an der normalen Nullstellung des Kupferrings ein kleines Massestück. Ich bohrte ein Loch in den Kupferring und befestigte einen Metallring (Gewicht = 7,8 g) mit einer Kupferschraube daran. Dies hatte zur Folge, dass sich die Nulllage des Drehpendels nun verschoben hat. Die alte Nulllage bei $\rho = 0^\circ$ wird instabil und es bilden sich zwei neue Nulllagen rechts und links von Normalnull ($\rho = +\rho_0$ und $\rho = -\rho_0$). Dies geschieht durch ein vom Metallring zusätzliches hervorgerufenes Drehmoment der Größe $M = mgr \cdot \sin \rho$. Somit ist auch der Funktionsgraph der potentiellen Energie keine Parabel mehr ($U(x) = \frac{1}{2}Dx^2$), sondern hat bei

$\pm \rho$ je ein Minimum. Als Gleichung für das Potential kann nun näherungsweise

$U(x) = \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{4}x^4$ ¹⁵angenommen werden.



(Grafiken selbst erstellt mit dem Computerprogramm „Vivitab“)

Die Rückstellkraft ergibt sich nun als 1. Ableitung des Potentials

$$F = -\frac{dU}{dx} = -bx - cx^3. \text{ Hieraus ist nun der Grund für das Abgleiten ins}$$

Chaos ersichtlich. Beim normalen mechanischen Drehpendel handelt es sich stets um eine lineare Rückstellkraft, die durch die Feder des Drehpendels hervorgerufen wird. Im beeinflussten Drehpendel ist auch diese Kraft vorhanden und wird in der Gleichung durch $-bx$ verdeutlicht. Hinzu kommt hier allerdings der Term $-cx^3$, der für die Anharmonizität verantwortlich ist. Die Rückstellkraft ist somit nicht mehr linear.

3.3.2 Versuchsdurchführung und Ergebnis

Zunächst brachte ich das Drehpendel mit einer geeigneten Erregerfrequenz und genügend hoher Dämpfung zur normalen harmonischen Schwingung um die neue Nulllage $+\rho_0$ (Die nichtlineare Rückstellkraft macht sich erst nach Verringerung der Dämpfung bemerkbar). Die Erregerfrequenz musste ich so wählen, dass das Massstück nicht über die senkrechte Nulllage hinaus schwingt, jedoch genügend Raum für die

¹⁵ Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München, Handreichungen für den Physikunterricht im Gymnasium – Computereinsatz im Physikunterricht S. 221

Schwingung bleibt. Der anregende Elektromotor hatte bei gleicher Spannung leider unterschiedliche Umdrehungszahlen, je nach dem, ob er noch kalt, warm oder schon überhitzt war. Deshalb ist es mir leider nicht möglich, einen genauen Wert für die Erregerspannung anzugeben. Sie bewegte sich bei mir jedoch immer zwischen 4 und 7 Volt.

Nun verringerte ich langsam die Dämpfung (Startwert bei ca. 6 Volt). Die nichtlineare Rückstellkraft kommt dadurch immer stärker zum Tragen. Bei einer Dämpfung von 0,5 Volt kam es dann zu der fürs Chaos typischen Periodenverdoppelung (siehe Anlage 1). Da die Dämpfung schon ziemlich gering war, brachte die Verringerung auf 0 Volt keine weitere Verdoppelung (siehe Anlage 2).

Ich versuchte daraufhin mit anderen Massestücken, anderer Erregerfrequenz und genaueren Netzgeräten noch weitere Verdoppelungen zu beobachten. Leider blieb dies jedoch ohne Erfolg. In der theoretischen Simulation sind diese Verdoppelungen möglich, bei der praktischen Durchführung sind mehr als eine jedoch scheinbar schwer zu beobachten.

4. Zusammenfassung

Im 19. Jahrhundert glaubten bedeutende Physiker wie Isaac Newton daran, die Zukunft durch Berechnung vorhersagen zu können. Die Chaostheorie hat jedoch Grenzen dieser Berechenbarkeit aufgezeigt. Viele komplexe Systeme reagieren höchst empfindlich auf äußere Einflüsse. Ein winziger Unterschied in der Ausgangssituation („Schmetterlingseffekt“) kann eine enorme Veränderung des Ergebnisses zur Folge haben. Diese Empfindlichkeit auf unterschiedliche Anfangsbedingungen wird als Sensitivität bezeichnet. Schon bei sehr einfachen Systemen lässt sich diese Veränderung bemerkbar machen. Die Populationsdynamik von Verhulst macht dies an einem rein mathematischen Beispiel deutlich. Sie ist deswegen so berühmt, da man an ihr typische Kennzeichen für das Abgleiten eines Systems ins Chaos ausmachen kann. Diese sind eine Nichtlinearität im Schwingungsverhalten und daraus resultierende Periodenverdoppelungen. Im Feigenbaumdiagramm kann man die chaotische Entwicklung

anhand der Attraktoren sehr gut darstellen. An den sehr einfachen physikalischen Systemen des nichtlinearen elektrischen Schwingkreises und des leicht beeinflussten mechanischen Drehpendels kann die Theorie von Verhulst physikalisch gezeigt werden. Auch hier treten Periodenverdopplungen auf, bevor das System ins Chaos ausbricht. Sie stellen ein Modell dafür da, wie sensitiv komplexe, nichtlineare Systeme wie das Wetter auf Einflüsse von außen reagieren. Da die Möglichkeiten der Weiterentwicklung sich exponentiell vergrößern, wird eine Berechnung bald unmöglich, man erhält ein zufälliges bzw. nicht vorhersagbares Ereignis. Ich fand heraus, dass beim elektrischen Schwingkreis die Frequenzen der Verdopplung mit zunehmender Induktivität der Spule sinken und schwerer zu erzeugen sind. Beim mechanischen Drehpendel ist mehr als eine Verdopplung nur sehr schwer zu beobachten.

5. Abschließende Bewertung

Die Chaostheorie hat die Hoffnung vieler Physiker zerstört, die Welt restlos berechnen zu können. Schon seit jeher wird versucht zu erkunden, „(...) was die Welt, im Innersten zusammenhält“¹⁶. Allerdings wird oft vergessen, welche Folgen dies hätte. Die Zukunft wäre in jedem Detail vorherbestimmt. Die Entwicklung und der Untergang von Leben wäre berechenbar. Wenn man den Gedanken weiterentwickelt, kann man sogar sagen, dass Handeln und Denken eines jeden Menschen determiniert ist. Durch den Zustand des Universums vor 15 Milliarden Jahren zu Zeiten des Urknalls festgelegt, gibt es keine Möglichkeit der freien Entscheidung. Das oft zitierte Schicksal wäre Wirklichkeit und der Mensch hat keine Möglichkeit einzugreifen. Dies würde das Ende der Freiheit des Denkens und des Handelns bedeuten. Es könnte keine Entscheidung mehr selbständig gefällt werden, da sie ja bereits vorherbestimmt ist, und berechnet werden kann. Die Chaostheorie zeigte Grenzen dieser Berechenbarkeit. Sie konnte deutlich machen, in welchem Rahmen Vorhersagen möglich sind und

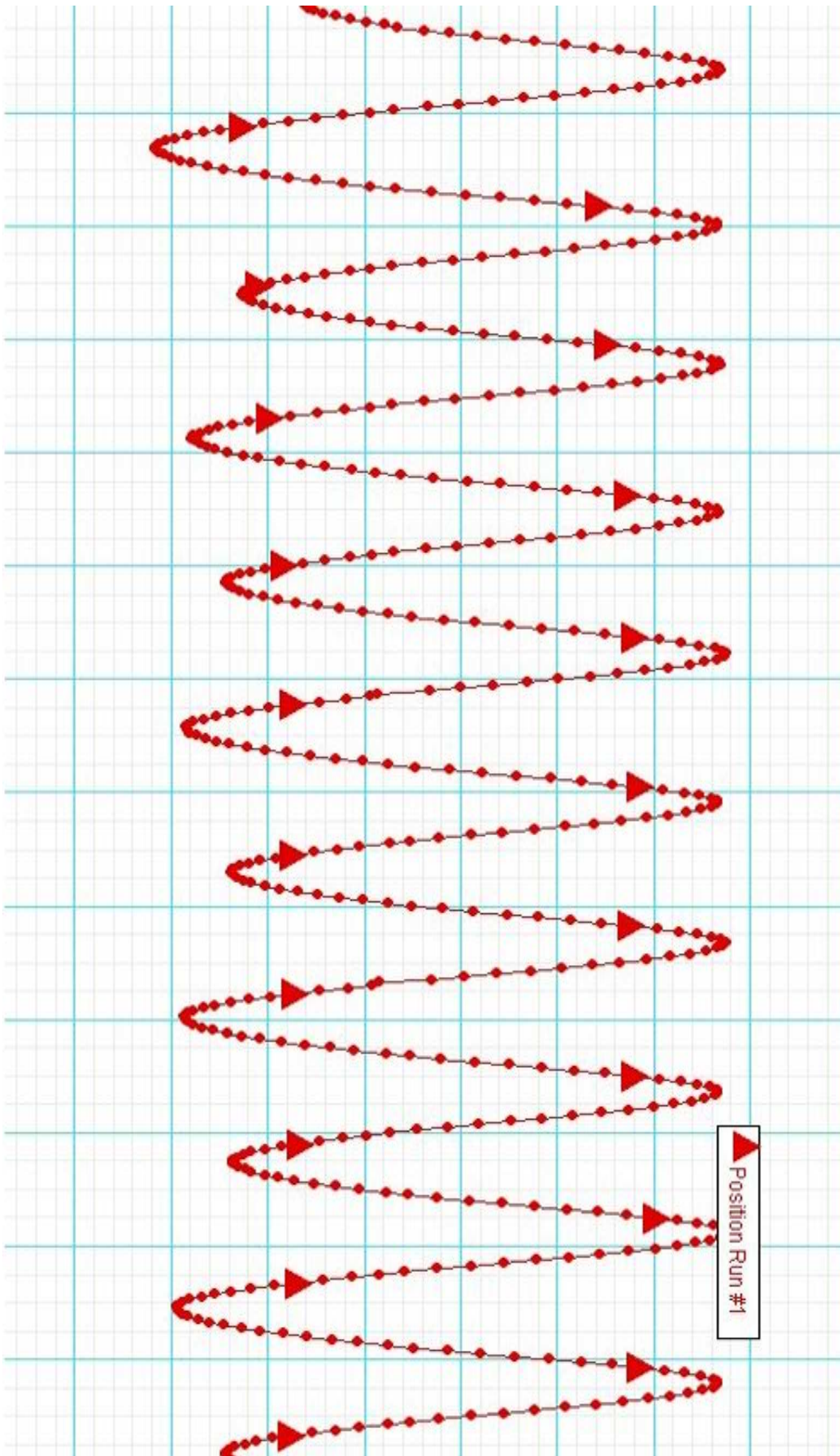
¹⁶ Johann Wolfgang von Goethe, Faust, Verlag C. H. Beck München, 16. Auflage, 1996, S.20

inwieweit weitere Berechnungen zu keinen brauchbaren Ergebnissen führen. So schön eine grenzenlose Berechenbarkeit auch sein könnte, genauso erschreckend und einschränkend könnten ihre Ausmaße sein. Joseph Ford, ein amerikanischer Chaostheoretiker meint dazu:

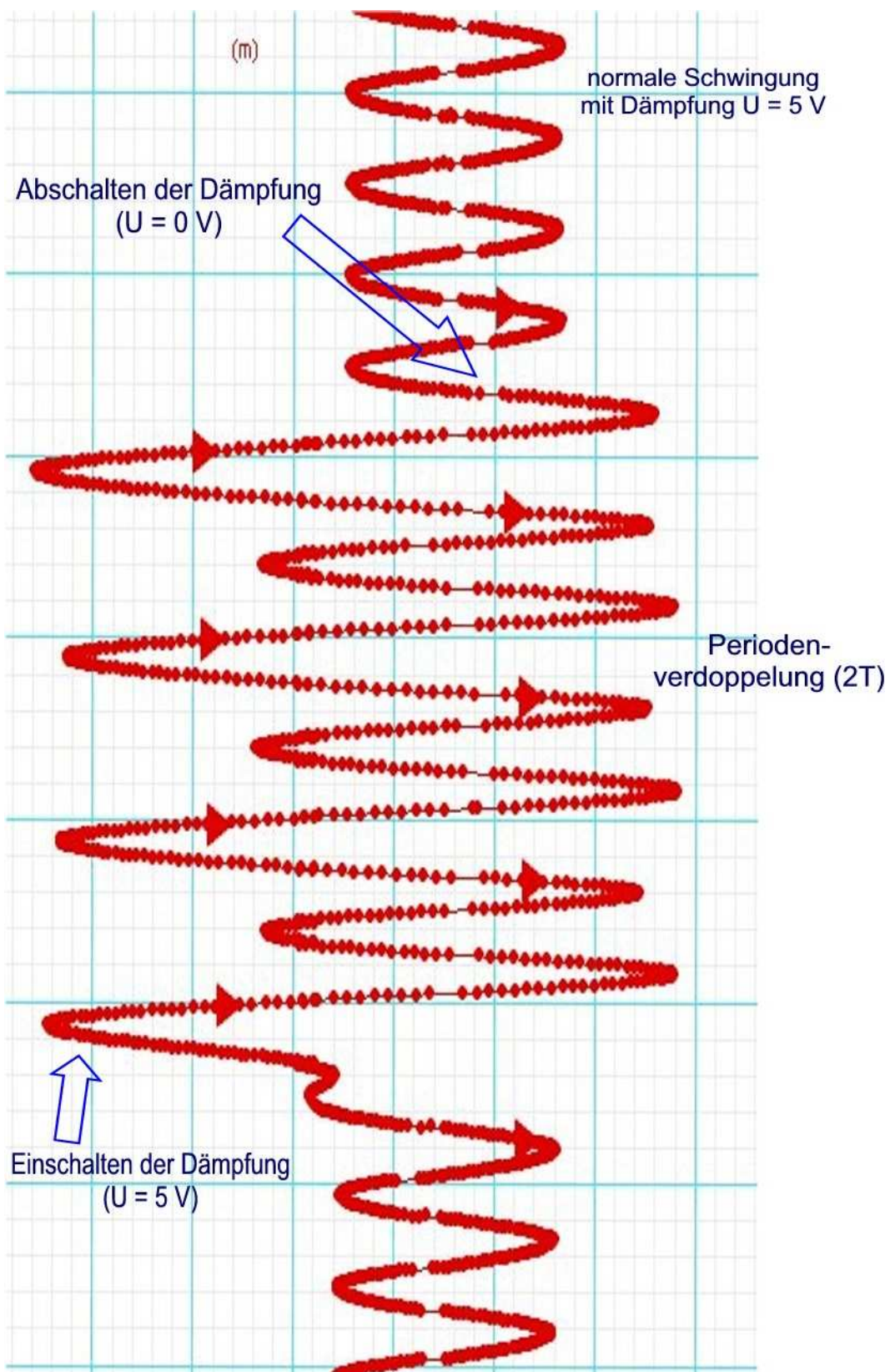
„Es ist deshalb wirklich angemessen, die Newtonsche Dynamik schließlich den Göttern zurückzugeben, denen sie gestohlen wurde; denn sie ist es ja, die die fehlende Information liefern könnte, die jenseits des menschlichen Verständnishorizonts liegt.“¹⁷

¹⁷ Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München, Handreichungen für den Physikunterricht im Gymnasium – Computereinsatz im Physikunterricht, S. 205

Anhang 1



Anhang 2



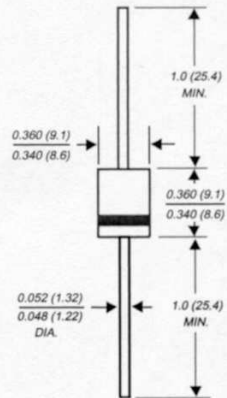
Anhang 3

P600A THRU P600M

GENERAL PURPOSE PLASTIC RECTIFIER

Reverse Voltage - 50 to 1000 Volts Forward Current - 6.0 Amperes

Case Style P600



Dimensions in inches and (millimeters)

FEATURES

- ◆ Plastic package has Underwriters Laboratory Flammability Classification 94V-0
- ◆ High forward current capability
- ◆ Construction utilizes void-free molded plastic technique
- ◆ High surge current capability
- ◆ High temperature soldering guaranteed: 250°C/10 seconds, 0.375" (9.5mm) lead length, 5 lbs. (2.3kg) tension

MECHANICAL DATA

Case: Void-free molded plastic body

Terminals: Plated axial leads, solderable per MIL-STD-750, Method 2026

Polarity: Color band denotes cathode end

Mounting Position: Any

Weight: 0.07 ounce, 2.1 grams

MAXIMUM RATINGS AND ELECTRICAL CHARACTERISTICS

Ratings at 25°C ambient temperature unless otherwise specified.


	SYMBOLS	P600A	P600B	P600D	P600G	P600J	P600K	P600M	UNITS
Maximum repetitive peak reverse voltage	VRRM	50	100	200	400	600	800	1000	Volts
Maximum RMS voltage	VRMS	35	70	140	280	420	560	700	Volts
Maximum DC blocking voltage	VDC	50	100	200	400	600	800	1000	Volts
Maximum average forward rectified current at T _A =60°C, 0.375" (9.5mm) lead length (FIG 1) T _L =60°C, 0.125" (3.18mm) lead length (FIG 2)	I(AV)	6.0 22.0						Amps	
Peak forward surge current 8.3ms single half sine-wave superimposed on rated load (JEDEC Method)	IFSM	400.0						Amps	
Maximum instantaneous forward voltage at: 6.0A 100A	V _F	0.90 1.30						1.0 1.4	Volts
Maximum DC reverse current at rated DC blocking voltage T _A = 25°C T _A =100°C	I _R	5.0 1.0						μA mA	
Typical junction capacitance (NOTE 1)	C _J	150.0						pF	
Typical reverse recovery time (NOTE 2)	t _{rr}	2.5						μS	
Typical thermal resistance (NOTE 3)	R _{θJA} R _{θJL}	20.0 4.0						°C/W	
Operating junction and storage temperature range	T _J , T _{STG}	-50 to +150						°C	

NOTES:

(1) Measured at 1.0 MHz and applied reverse voltage of 4.0 Volts

(2) Reverse recovery time conditions: I_F=0.5A, I_R=1.0A, I_R=0.25A

(3) Thermal resistance from junction to ambient and from junction to lead at 0.375" (9.5mm) lead length, P.C.B. mounted with 1.1 x 1.1 (30 x 30mm) copper pads

 GENERAL
SEMICONDUCTOR

Literaturverzeichnis

Gerok, Wolfgang, Ordnung und Chaos, S. Hirzel Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft Stuttgart, 2. Auflage, 1990

Geschke, Dieter, Physikalisches Praktikum mit multimedialen Ergänzungen, Verlag Teubner, 12. Auflage, 2001

Bentele J. und Theofel J., Feigenbaumdiagramm, <http://www.gus.bb.bw.schule.de/fbaum/fbaum.htm>; Gymnasium Unterrieden, Sindelfingen, Aufrufdatum: 15.1.2003

Heinrichs, Georg, Chaos, Aulis Verlag Köln, 2. verbesserte Auflage, 1993

Grehn, Joachim, Metzler Physik, Schroedel Verlag GmbH, 3. Auflage, 1998

Schwebinghaus, Ulrich, www.fraktalwelt.de, Aufrufdatum: 20.12.2002

Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München, Handreichungen für den Physikunterricht im Gymnasium – Computereinsatz im Physikunterricht, Druckhaus Kastner, Band 4, 1996

Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München, Handreichung für den Mathematik- und Physikunterricht im Gymnasium - Fraktale Geometrie und deterministisches Chaos, Wolnzach, Druckhaus Kastner, 1997

Wolferseder, <http://wolferseder.de/Feigenbaum.html>, Aufrufdatum: 20.12.2002